

**Я.И. ПЕРЕЛЬМАН**



# **ЗАНИМАТЕЛЬНАЯ АРИФМЕТИКА**

Задачи с необычными сюжетами,  
увлекательные исторические  
экскурсы, любопытные примеры  
из повседневной жизни

АСТ  
Астрель

**Я. И. Перельман**

# **ЗАНИМАТЕЛЬНАЯ АРИФМЕТИКА**

**ЗАГАДКИ И ДИКОВИНКИ  
В МИРЕ ЧИСЕЛ**

Москва  
АСТ • Астрель  
ТРАНЗИТКНИГА  
2003

УДК 51  
ББК 22.1я92  
П27

Серия  
**ЗАНИМАТЕЛЬНАЯ НАУКА**

Автор предисловия и комментариев *Ю.А. Данилов*

Художник *М.А. Железняков*  
Оформление обложки дизайн-студии «Дикобраз»

Подписано к печати 14.07.2003.

Формат 84х108/32. Гарнитура «Школьная».

Усл. печ. л. 15,12. Тираж 8000 экз. Заказ № 1310.

Санитарно-эпидемиологическое заключение  
№ 77.99.10.953.П.000009.01.03 от 10.01.2003

Общероссийский классификатор продукции ОК-005-93,  
том 2; 953004 – литература научная и производственная

**Перельман Я.И.**

**П27** Занимательная арифметика: Загадки и диковинки в мире чисел / Я.И. Перельман. — М.: ООО «Издательство Астрель»: ООО «Издательство АСТ»: ООО «Транзиткнига», 2003. — 255, [1] с.: ил. — (Занимательная наука).

ISBN 5-17-020458-2 (ООО «Издательство АСТ»)

ISBN 5-271-07240-1 (ООО «Издательство Астрель»)

ISBN 5-9578-0436-3 (ООО «Транзиткнига»)

Книга об арифметических парадоксах, головоломках и фокусах, написанная известным мастером занимательного жанра Я.И. Перельманом.

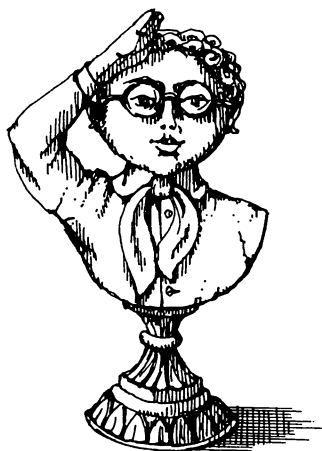
УДК 51  
ББК 22.1я92

ISBN 5-17-020458-2 (ООО «Издательство АСТ»)

ISBN 5-271-07240-1 (ООО «Издательство Астрель»)

ISBN 5-9578-0436-3 (ООО «Транзиткнига»)

© ООО «Издательство Астрель», 2003



## К ЧИТАТЕЛЮ СЕРИИ «ЗАНИМАТЕЛЬНАЯ НАУКА»

Предлагаемая вниманию читателя книга замечательного популяризатора науки Якова Исидоровича Перельмана «Занимательная арифметика. Загадки и диговинки в мире чисел» — очередной выпуск серии «Занимательная наука», выпускаемой нашим издательством. Первое издание «Занимательной арифметики»<sup>1</sup> вышло в 1926 г. в ленинградском издательстве «Время». Как и другие книги Я. И. Перельмана, книга эта сразу полюбилась читателям и выдержала семь изданий при жизни и несколько изданий после его безвременной кончины в осажденном Ленинграде. Девятое издание вышло в московском издательстве «Физматгиз» в 1959 г. с дополнениями А. З. Рывкина.

---

<sup>1</sup> Первоначальный вариант книги под названием «Загадки и диговинки в мире чисел» выпустило в 1923 г. двумя изданиями петроградское издательство «Наука и школа».

Как и другие книги Я. И. Перельмана, «Занимательная арифметика» раскрывает перед широким кругом читателей удивительный мир, по которому обычно скользит, не замечая, как много прекрасного и удивительного таится в нем, равнодушный взгляд взрослого человека, обремененного повседневными заботами, пребывающего в обманчивой уверенности, что он «все это давно знает», и утратившего детскую простоту восприятия и способность удивляться.

Главные герои «Занимательной арифметики» — четыре арифметических действия: сложение, вычитание, умножение и деление. Усвоенные на рецептурном уровне («делай так и не спрашивай почему»), они таят в себе немало интересного даже для тех, кто легко и свободно оперирует ими, не задумываясь над тем, почему все так хорошо получается.

Яков Исидорович Перельман обладал особым даром учить, не поучая, и заражать людей своим неумным интересом к основам науки. Друзья называли эту особенность его дара «вирусом острого перельманита».

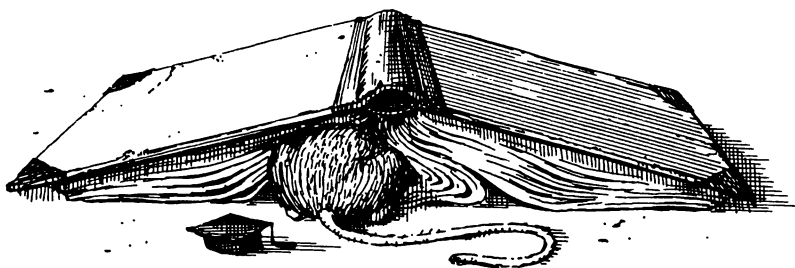
Выпуская «Занимательную арифметику» Я. И. Перельмана, издательство не только воздает должное памяти выдающегося популяризатора науки, но и надеется, что «вирус перельманита» передастся читателям этой замечательной книги — если не всем, то по крайней мере некоторым.

*Ю. Данилов*



# **ЗАНИМАТЕЛЬНАЯ АРИФМЕТИКА**





## ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА

*На русском языке имеется уже ряд оригинальных и переводных сборников, преследующих, в общем, ту же цель, что и настоящая книга: оживить школьную арифметику введением в нее интересных задач, занимательных упражнений, любопытных теоретических и практических сведений. Знакомым с этой литературой хорошо известно, что большинство подобных книг черпает материал из одного и того же ограниченного фонда, накопленного столетиями; отсюда — близкое сходство этих сочинений, разрабатывающих, с различной детальностью, почти одни и те же темы. Но традиционный инвентарь математических развлечений достаточно уже исчерпан в нашей литературе. Новые книги этого рода должны привлекать новые сюжеты.*

*«Занимательная арифметика» представляет в большей своей части попытку предложить ряд новых, ранее не разрабатывавшихся сюжетов*



*арифметических развлечений. Подыскание новых тем в столь многосторонне обследованной области — дело нелегкое: составитель не может здесь пользоваться коллективным трудом длинного ряда известных и безызвестных собирателей, а предоставлен лишь собственным силам. Поэтому к «Занимательной арифметике», как к первому опыту обновления традиционного материала подобных сборников, не должна прилагаться слишком строгая мерка.*

*Забываясь о том, чтобы сборник читался легко, не требуя чрезмерного напряжения, составитель избегал запутанных вопросов и включал преимущественно такой материал, который вполне посилен для большинства читателей.*

*Хотя книга имеет в виду читателей, знакомых лишь с элементами арифметики, в ней найдутся страницы, небезынтересные, быть может, и для более сведущих.*

*Я. И. Перельман*



*Глава первая*

Старое и новое  
о цифрах и нумерации





## 1. ТАИНСТВЕННЫЕ ЗНАКИ

В марте 1917 г. жители Ленинграда (тогда Петрограда) были немало озадачены и даже встревожены таинственными знаками, появившимися неизвестно как у дверей многих квартир. Молва приписывала этим знакам разнообразные значения. Те, которые мне пришлось видеть, имели форму черточек, чередующихся с крестами.

Пошли зловещие слухи о грабительских шайках, помечающих квартиры будущих жертв. Комиссар Временного правительства по г. Петрограду, успокаивая население, утверждал, что «таинственные знаки, которые чьей-то невидимой рукой делаются на дверях мирных обывателей в виде крестов, букв, фигур, как выяснилось по произведенному дознанию, делаются провокаторами и германскими шпионами»; он приглашал жителей эти знаки стирать и уничтожать, «а в случае обнаружения лиц, занимающихся этой работой, задерживать и направлять по назначению».

Таинственные черточки и зловещие кресты появились также у дверей моей квартиры и квартир моих соседей. Некоторый опыт в распутывании замысловатых задач помог мне, однако, разгадать нехитрый и совсем нестрашный секрет этой тайнописи. Своими соображениями я поделился с согражданами, поместив в газете следующую заметку.

### Таинственные знаки

«В связи с таинственными знаками, появившимися на стенах многих петроградских домов, небезполезно разъяснить смысл одной категории подобных знаков, которые, несмотря на зловещее начертание, имеют самое невинное значение. Я говорю о знаках такого типа:

+ ||                  + + ||||                  + + + |||

Подобные знаки замечены во многих домах на черных лестницах у дверей квартир. Обычно знаки этого типа имеются у всех входных дверей данного дома, причем в пределах одного дома двух одинаковых знаков не наблюдается. Их мрачное начертание, естественно, внушает тревогу жильцам. Между тем смысл легко раскрывается, если сопоставить их с номерами соответствующих квартир. Так, например, приведенные выше знаки найдены мною у дверей квартир № 12, № 25 и № 33:

+	+ +	+ + +
12	25	33

Нетрудно догадаться, что кресты означают десятки, а палочки — единицы; так оказалось во *всех без исключения случаях*, которые мне приходилось наблюдать. Своеобразная нумерация эта, очевидно, принадлежит дворникам-китай-

цам<sup>1</sup>, не понимающим наших цифр. Появились эти знаки, конечно, давно, но только в дни Февральской революции обратили на себя внимание граждан»<sup>2</sup>.

Таинственные знаки такого же очертания, но только не с прямыми, а с *косыми* крестами, обнаружены были и в таких домах, где дворниками служили пришедшие из деревень русские крестьяне. Здесь уже не трудно было выяснить истинных авторов «тайнописи», вовсе не подозревавших, что их безыскусственные обозначения номеров квартир только теперь были замечены и вызвали такой переполох.

## 2. СТАРИННАЯ НАРОДНАЯ НУМЕРАЦИЯ

Откуда взяли петроградские дворники этот простой способ обозначения чисел: кресты – десятки, палочки – единицы?

Конечно, не придумали этих знаков в городе, а привезли их из родных деревень. «Нумерация» эта давно уже в широком употреблении и понятна была каждому, даже неграмотному, крестьянину. Восходит она, без сомнения, к глубокой древности и употребительна не только у нас. Не говоря уже о родстве с китайскими обозначениями, бросается в глаза и сходство этой упрощенной нумерации с

---

<sup>1</sup> Их было много тогда в Петрограде. Позднее я узнал, что китайский иероглиф для 10 имеет как раз указанную форму креста (китайцы не употребляют наших «арабских» цифр).

<sup>2</sup> Читателю наших дней покажется, вероятно, очень странным, что знаки эти оставались до дней Февральской революции незамеченными. Напомню, однако, что большинство живших в квартирах с двумя входами пользовались обычно только парадной лестницей и впервые вышли на черную в дни революции, когда парадные двери были закрыты.

римской: и в римских цифрах палочки означают единицы, косые кресты – десятки.

Любопытно, что эта народная нумерация была некогда у нас даже узаконена: по такой именно системе, только более развитой, должны были вестись сборщиками податей записи в податной тетради. «Сборщик, – читаем мы в старом «Своде законов», – принимая от кого-либо из домохозяев вносимые к нему деньги, должен сам, или через писаря, записать в податной тетради против имени того домохозяина, которого числа сколько получено денег, выставляя количество принятой суммы цифрами и *знаками*. Знаки сии для сведения всех и каждого ввести повсеместно одинаковые, а именно:

десять рублей означать знаком	□;
рубель	○
десять копеек	×
копейку	
четверть	—

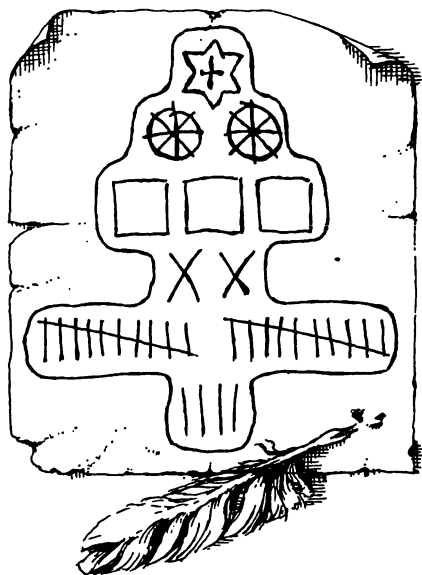
Например, двадцать восемь рублей пятьдесят семь копеек три четверти:

□□○○○○○○○○○×××××||||||≡».

В другом месте того же тома «Свода законов» находим еще раз упоминание об обязательном употреблении народных числовых обозначений. Приводятся особые знаки для тысячи рублей – в виде шестиконечной звезды с крестом в ней, и для ста рублей – в виде колеса с 8 спицами. Но обозначения для рубля и десяти копеек здесь устанавливаются иные, чем в предыдущем законе.

Вот текст закона об этих так называемых «ясячных знаках»:

«Чтобы на каждой квитанции, выдаваемой Родовитому Старосте, от которого внесен будет ясак, кроме изложения словами, было показываемо осо-



**Рис. 1.** Старинная запись на квитанции в уплате подати («ясака»). Эта запись означает сумму 1232 руб. 24 коп.

быми знаками число внесенных рублей и копеек так, чтобы сдающие простым счетом сего числа могли быть уверены в справедливости показания<sup>1</sup>. Употребляемые в квитанции знаки означают:

звезда	— тысяча рублей,
колесо	— сто рублей,
квадрат	— десять рублей,
х	— один рубль,
	— десять копеек,
	— копейку.

Дабы не можно было сделать здесь никаких прибавлений, все таковые знаки очерчивать кру-

<sup>1</sup> Это показывает, что описанные знаки были в широком употреблении среди населения.



гом прямыми линиями. Например, 1232 руб. 24 коп. изображают так» (см. рис. 1).

Как видите, употребляемые нами арабские и римские цифры – не единственный способ обозначения чисел. В старину применялись у нас, да еще и теперь кое-где по деревням применяются другие системы письменного счисления, отдаленно сходные с римскими и совсем не сходные с арабскими цифрами.

Но и это еще не все способы изображения чисел, какие были в употреблении: многие купцы, например, имели свои секретные знаки для числовых обозначений – так назы-

ваемые торговые «меты». О них побеседуем сейчас подробнее.



**Рис. 2.** Таинственные меты на книгах обозначали цену, поставленную предусмотрительным торговцем.

### 3. СЕКРЕТНЫЕ ТОРГОВЫЕ «МЕТЫ»

В дореволюционное время на вещах, купленных у офеней<sup>1</sup> или в частных магазинах, особенно провинциальных, можно было зачастую заметить непонятные буквенные обозначения вроде

*а ве                      в уо.*

Это не что иное, как цена вещи без запроса, которую торговец обозначал на товаре, но так, однако, чтобы ее не мог разгадать покупатель. Бросив взгляд на эти буквы, торговец сразу проникал в их скрытый смысл и, сделав надбавку, называл покупателю цену с запросом.

Система обозначений была весьма проста. Торговец выбирал какое-нибудь слово, составленное из 10 различных букв; чаще всего останавливали выбор на словах «трудолюбие» и «правосудие». Первая буква слова обозначала 1, вторая – 2, третья – 3 и т. д.; десятой буквою обозначался ноль. С помощью этих условных букв-цифр торговец обозначал на товарах их цену, храня в строгом секрете «ключ» к своей системе прибылей.

Если, например, выбрано было слово

*п р а в о с у д и е,*  
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

то цена 4 руб. 75 коп. обозначалась так:

*в уо.*

Иногда цена на товаре писалась в виде дроби; например, на одной из купленных мною книг имеется обозначение

$\frac{о е}{т р о}$

---

<sup>1</sup> Офеня – бродячий торговец, продававший по деревням галантерею, книжки, лубочные картинки. – *Примеч. ред.*

Это значит, что при ключе «трудолюбие» надо запросить 1 руб. 25 коп., себе же книга стоила 50 коп.

#### 4. ШАШКИ ВМЕСТО ЦИФР

После только что сказанного легко сообразить, что числа можно изображать не только с помощью цифр, но и с помощью любых иных знаков или даже предметов: карандашей, перьев, линеек, резинок и т. п., — надо только условиться приписывать каждому предмету значение какой-нибудь определенной цифры. Можно даже, ради курьеза, с помощью таких цифр-предметов изображать действия над числами: складывать, вычитать, умножать, делить.

В одном зарубежном шахматном журнале была предложена задача: раскрыть истинный смысл следующего примера деления чисел, в котором почти все цифры заменены пешками (на нашем рис. 3 — шашками). Из 28 цифр известны только две: одна (8) в частном и другая (1) в остатке.

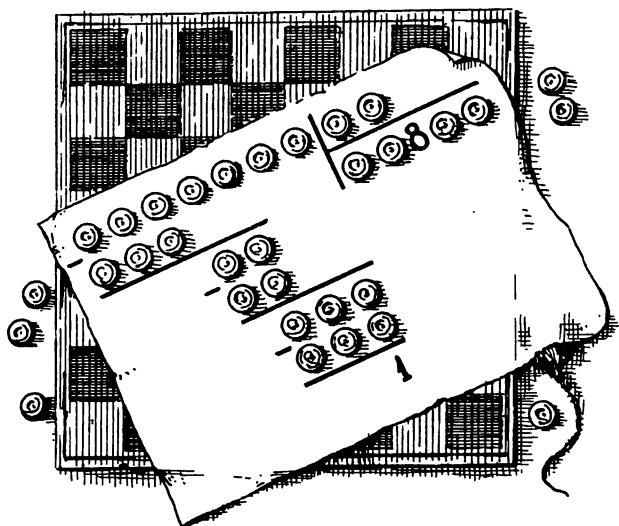
Казалось бы, доискаться значения прочих 26 цифр, обозначенных кружками, немислимо. Между тем это сравнительно несложная задача для каждого, кто отчетливо представляет себе смысл отдельных операций, входящих в состав действия деления.

Вот какой ход рассуждений приводит нас к цели.

Вторая цифра частного есть, конечно, 0. Это следует из того, что к остатку от первого вычитания снесена не одна цифра, а две. Ясно, что после снесения первой цифры составилось число, меньшее делителя, а в таких случаях очередная цифра частного есть 0.

По сходным основаниям заключаем, что четвертая цифра частного также 0.

Всматриваясь в расположение кружочков, замечаем, что двузначный делитель, будучи умно-



**Рис. 3.** *Нелегко догадаться, какие цифры заменены здесь шашками.*

жен на 8, дает число двузначное; когда же его умножают на первую (пока неизвестную) цифру частного, получается число из трех цифр. Значит, эта первая цифра частного больше 8; такой цифрой может быть только 9.

Сходным образом устанавливаем, что и последняя цифра частного есть 9.

Теперь частное определилось: 90 809. Остается раскрыть смысл делителя. Делитель состоит, мы знаем, из двух цифр; кроме того, расположение шашек говорит о том, что это двузначное число при умножении на 8 дает также двузначное число; при умножении же на 9 оно дает произведение, состоящее уже из трех цифр. Что же это за число?

Производим испытания, начиная с наименьшего двузначного числа, 10:

$$10 \times 8 = 80,$$

$$10 \times 9 = 90.$$

Число 10, как видим, не удовлетворяет требуемым условиям: оба произведения двузначные.

Испытываем следующее двузначное число, 11:

$$11 \times 8 = 88,$$

$$11 \times 9 = 99.$$

Число 11 также, очевидно, не годится: оба произведения снова двузначные.

Испытываем 12:

$$12 \times 8 = 96,$$

$$12 \times 9 = 108.$$

Число 12 удовлетворяет всем требованиям. Нет ли еще таких чисел?

Испытаем 13:

$$13 \times 8 = 104,$$

$$13 \times 9 = 117.$$

Оба произведения трехзначные; следовательно, 13 не годится. Ясно, что неподходящими являются и все числа, большие, чем 13.

Итак, единственный возможный делитель — число 12.

Зная делитель, частное и остаток, легко находим делимое и восстанавливаем весь случай деления.

Итак, делимое =  $90\,809 \times 12 + 1 = 1\,089\,709$ .

Случай деления:

$$\begin{array}{r|l} 1089709 & 12 \\ - 108 & 90809 \\ \hline 97 & \\ - 96 & \\ \hline 109 & \\ - 108 & \\ \hline 1 & \end{array}$$

Как видим, по двум известным цифрам нам удалось установить смысл 26 неизвестных цифр.

## 5. АРИФМЕТИКА ЗА ЗАВТРАКОМ

Перед нами ряд действий над числами, обозначенными предметами сервировки стола (рис. 4). «Вилка», «ложка», «нож», «кувшинчик», «чайник», «тарелка» — все это знаки, каждый из которых заменяет определенную цифру.

Глядя на эту группу ножей, вилок, посуды и т. п., попробуйте угадать: какие именно числа здесь обозначены?

С первого взгляда задача кажется очень трудной: приходится разгадывать настоящие иероглифы, как сделал некогда француз Шампольон<sup>1</sup>. Но наша задача гораздо легче: вы ведь знаете, что числа здесь хотя и обозначены вилками, ножами, ложками и т. п., но написаны по десятичной системе счисления; т. е. вам известно, что тарелка, стоящая на втором месте (считая справа), есть цифра десятков, что предмет на

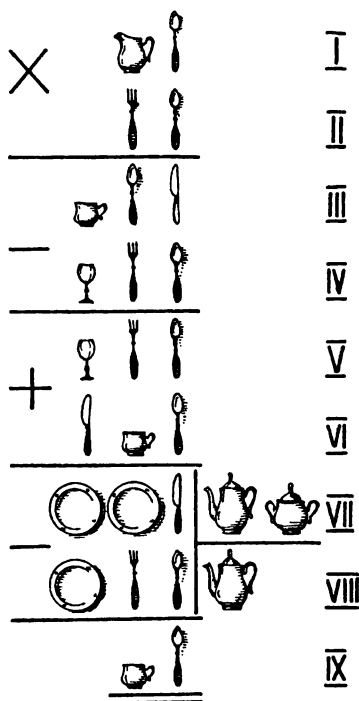


Рис. 4. Какие числа обозначают здесь эти кухонные предметы?

<sup>1</sup> Жан Франсуа Шампольон (1790–1832) — французский египтолог, первым расшифровавший древнеегипетские иероглифы, основатель египтологии — науки о языке, истории и культуре Древнего Египта и сопредельных стран. — *Примеч. ред.*

право от нее — цифра единиц, а по левую сторону — цифра сотен. Кроме того, вы знаете, что расположение всех этих предметов имеет определенный смысл, который вытекает из сущности арифметических действий, производимых над обозначенными ими числами. Все это может значительно облегчить вам решение предложенной задачи.

### *Решение*

Вот как можно доискаться значения расставленных здесь предметов. Рассматривая первые три ряда на нашем рисунке, вы видите, что «ложка», умноженная на «ложку», дает «нож». А из следующих рядов видно, что «нож» без «ложки» дает «ложку» или что «ложка» + «ложка» = «ножу».

Какая же цифра дает одно и то же число и при удвоении, и при умножении сама на себя? Это может быть только 2, потому что  $2 \times 2 = 2 + 2$ . Таким образом узнаём, что «ложка» = 2 и, следовательно, «нож» = 4.

Теперь идем дальше. Какая цифра обозначена «вилкой»? Попробуем разгадать это, присмотревшись к первым трем рядам, где «вилка» участвует в умножении, и к рядам III, IV и V, где та же «вилка» фигурирует в действии вычитания. Из группы вычитания вы видите, что, отнимая в разряде десятков «вилку» от «ложки», получаем в результате «вилку», т. е. при вычитании 2 минус «вилка» получается «вилка». Это может быть в двух случаях: либо «вилка» = 1; и тогда  $2 - 1 = 1$ ; либо же «вилка» = 6; и тогда, вычитая 6 из 12 (единица высшего разряда занимается у «чашки»), получаем 6.

Что же выбрать: 1 или 6?

Испытаем, годится ли 6 для «вилки» в других действиях. Обратите внимание на умножение чисел, стоящих в I и II рядах. Если «вилка» = 6, то во втором ряду стоит число 62 (мы уже знаем, что

«ложка» = 2). Нетрудно понять, что в таком случае в I ряду должно стоять число 12, т. е. «кувшинчик» обозначает цифру 1. В самом деле, если бы «кувшинчик» обозначал цифру 2 или какую-либо большую цифру, произведение чисел I и II рядов было бы четырехзначным числом, а не трехзначным, как должно быть. Итак, если «вилка» = 6, то в I ряду стоит число 12, а во II ряду – 62. Их произведение есть  $12 \times 62 = 744$ .

Но этого не может быть, так как цифра десятков этого произведения есть «ложка», т. е. 2, а не 4, как получилось у нас. Значит, нельзя было допустить, что «вилка» = 6, а надо было принять ее равной единице.

Узнав путем таких – довольно, правда, долгих – поисков, что «вилка» обозначает цифру 1, мы дальше уже идем более уверенно и быстро. Из действия вычитания в III и IV рядах видим, что «чашка» обозначает либо 6, либо 8. Но 8 приходится отвергнуть, потому что тогда вышло бы, что «бокальчик» = 4, а мы знаем, что цифра 4 обозначена «ножом». Итак, «чашка» обозначает цифру 6, а следовательно, «бокальчик» – цифру 3.

Какая же цифра обозначена «кувшинчиком» в I ряду? Это легко узнать, раз нам известно произведение (III ряд, 624) и один из множителей (II ряд, 12). Разделив 624 на 12, получаем 52. Следовательно, «кувшинчик» = 5.

Значение «тарелки» определяется просто: в VII ряду «тарелка» = «вилка» + «чашка» = «бокальчик» + «нож»; т. е. «тарелка» =  $1 + 6 = 3 + 4 = 7$ .

Остается разгадать цифровое значение «чайника» и «сахарницы» в VII ряду. Так как для цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7 предметы уже найдены, то остается выбирать только между 8, 9 и 0. Подставив в действие деления, изображенное в последних трех рядах, соответствующие цифры вместо предметов,



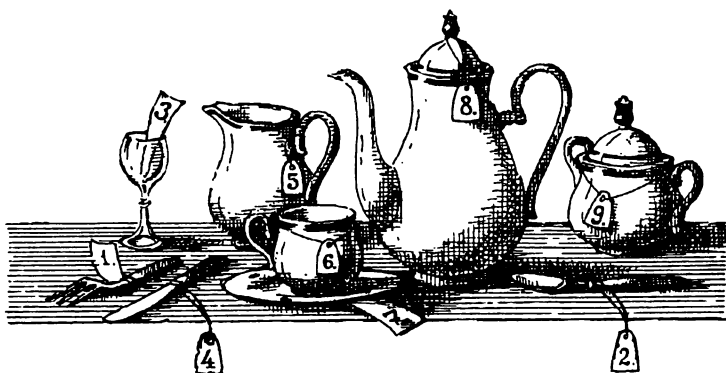


Рис. 5.

получим такое расположение (буквами *ч* и *с* обозначены «чайник» и «сахарница»):

$$\begin{array}{r} 774 : чс = ч. \\ - 712 \\ \hline 62 \end{array}$$

Число 712, мы видим, есть произведение двух неизвестных чисел, *чс* и *ч*, которые, конечно, не могут ни быть нолем, ни оканчиваться нолем: значит, ни *ч*, ни *с* не есть ноль. Остается два предположения: *ч* = 8 и *с* = 9, или же, наоборот, *ч* = 9 и *с* = 8. Но, перемножив 98 на 8, мы не получаем 712; следовательно, «чайник» обозначает 8, а «сахарница» — 9 (действительно:  $89 \times 8 = 712$ ).

Итак, мы путем нехитрых арифметических вычислений разгадали иероглифическую надпись из предметов столовой сервировки:

«кувшин» = 5, «чашка» = 6, «сахарница» = 9,  
«ложка» = 2, «бокальчик» = 3, «тарелка» = 7,  
«вилка» = 1, «чайник» = 8, «нож» = 4.

А весь ряд арифметических действий, изображенный этой оригинальной сервировкой, приобретает такой смысл:

$$\begin{array}{r}
 \times 52 \\
 12 \\
 \hline
 624 \\
 - 312 \\
 \hline
 312 \\
 + 462 \\
 \hline
 774 \quad | \quad 89 \\
 - 712 \quad | \quad 8 \\
 \hline
 62
 \end{array}$$

## 6. АРИФМЕТИЧЕСКИЕ РЕБУСЫ

То, что я называю арифметическими ребусами, — занимательная игра американских школьников: отгадывание задуманного слова решением задачи вроде той, какую мы решили в предыдущей статье.

Загадывающий задумывает слово, состоящее из 10 неповторяющихся букв, например: «трудлюбие», «специально», «просвещать». Приняв буквы задуманного слова за цифры, загадывающий изображает посредством этих букв какой-нибудь случай деления. Если задумано слово «просвещать», то можно взять такой пример деления:

*п р о с в е щ а т ь*  
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

123564	3548	п р о в е с	о в с а
10644	34	п ь е с с	о с
17124		п щ п р с	
14192		п с п т р	
2932		р т о р	

делимое — *п р о в е с*, 123564

делитель — *о в с а*, 3548

Можно взять и другие слова:

?

в о с с т а т ь	с в е т
с в е т	п п е т а
щ щ в т	
с в е т	
о п т ь а	
р щ с п с	
с с т с т	
с п п р п	
о а р а ь	
о е в в р	
п щ р а	

делимое —

*в о с с т а т ь*, 53449890

делитель —

*с в е т*, 4569

Буквенное изображение определенного случая деления вручается отгадчику, который и должен по этому, на первый взгляд бессмысленному, набору букв угадать задуманное слово.

Как следует в подобных случаях доискиваться числового значения букв, читатель уже знает: мы объяснили это, когда решали задачу предыдущей статьи. При некотором терпении можно успешно разгадывать эти арифметические ребусы, если только пример достаточно длинен и дает необходимый материал для догадок и испытаний. Если же выбраны слова, дающие чересчур короткий случай деления, например:

*т р у д о л ю б и е*

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

делимое — *б л ю д о*, 86745

делитель — *т р у д*, 1234

б л ю д о	т р у д
б л у б	ю е
у л о	

то разгадывание очень трудно. В подобных случаях надо просить загадывающего продолжить деле-

ние до сотых или тысячных долей, т. е. получить в частном еще два или три десятичных знака. Вот пример деления до сотых долей:

<i>специально</i>	<i>палец</i>	<i>пила</i>
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0	<i>пила</i>	<i>со, ел</i>
делимое — <i>палец</i> , 26734	<i>н л ц о</i>	
делитель — <i>пила</i> , 2576	<i>л л п ь</i>	
	<i>п о с п о</i>	
	<i>с ь о е п</i>	
	<i>п о ь ь</i>	

Если бы в этом случае мы остановились на целом частном (*со*), отгадка задуманного слова едва ли была бы возможна.

Что касается слов, пригодных в качестве «ключа» для подобных ребусов, то выбор их не так беден, как может казаться; кроме прежде указанных, можно использовать слова:

*республика, пятидневка,  
демократия, струбцинка.*

Годятся и собственные имена, например, *Лажечников*<sup>1</sup>.

Как далеко может идти изобретательность в этом направлении, показывает следующий пример. Один из читателей, тов. П. Б. Горцев (Ростов-на-Дону), прислал мне остроумно составленный арифметический ребус, разгадка которого представляет собою... лозунг для пропаганды идеи межпланетных путешествий. Ребус состоит из трех частей, последовательно развертывающих этот близкий мне лозунг. Вот они:

<sup>1</sup> Иван Иванович Лажечников (1792–1869) – русский писатель. Особой известностью пользуется его роман «Ледяной дом» (1835). – *Примеч. ред.*

I		II	
тайник	рык	булат	неп
анн	еваи	неп	пуо
ркен		нна	
ратн		нсеу	
вйи		аент	
тне		апео	
реkk		абу	
ррик			
нй			

III	
зарев о	трюм
трюм	зт
юррюо	
оиоре	
еом	

Читатель, который пожелает разгадать этот тройной (и весьма нелегкий) ребус, узнает в итоге, что

I	II	III
реактивный,	планетобус,	завоюет мир.

Предлагаю далее читателю самостоятельно разгадать следующий ряд ребусов, придуманных тем же П. Б. Горцевым<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Решения этих ребусов приведены в конце первой главы.

## Ребус 1

п р а к т и к а н т	с у м а т р а
с у м а т р а	м р п р
<hr/>	
у н м у т м у а	
н р и и у с т у	
<hr/>	
с а с с к н и н	
у и р т и к у и	
<hr/>	
н и у р р н с т	
н р и и у с т у	
<hr/>	
с п а и у к	

## Ребус 2

к р и з и с	э т а п
э т а п	э е т
<hr/>	
з и е и	
и е к а	
<hr/>	
э с с и с	
э э з к и	
<hr/>	
э п е е	

## Ребус 3

т е а т р	к и л ь
к и л ь	р к
<hr/>	
р т к т р	
р р о б ь	
<hr/>	
к о и р	

## Ребус 4

п е р с и к	б а л
с б п е	б к п
<hr/>	
у л р и	
у п б с	
<hr/>	
е у у к	
е п е и	
<hr/>	
р с р	

## 7. НАЙТИ ТРЕХЗНАЧНОЕ ЧИСЛО

Рассмотрим еще один арифметический ребус несколько иного рода.

Искомое число состоит из трех разных цифр:  $A$ ,  $B$ ,  $C$ . Запишем его условно так:  $ABC$ , помня, что  $C$  — цифра единиц,  $B$  — десятков,  $A$  — сотен. Надо найти это число, если известно, что

$$\begin{array}{r} \times \quad A \ B \ C \\ \quad B \ A \ C \\ \hline \quad * \ * \ * \ * \\ + \quad * \ * \ A \\ \hline * \ * \ * \ B \\ \hline * \ * \ * \ * \ * \end{array}$$

Звездочками обозначены неизвестные цифры.

### *Разгадка*

Ведем поиски в таком порядке.

Прежде всего устанавливаем, что ни  $A$ , ни  $B$ , ни  $C$  не есть 0. Мы уверены в этом, потому что иначе не могли бы получиться три строки частных произведений.

Замечаем далее, что

произведение  $C \times A$  оканчивается на  $A$ ,  
произведение  $C \times B$  оканчивается на  $B$ ;

выводим отсюда, что  $C$  может быть либо 1, либо 6. Для единицы соображение наше очевидно; для 6 оно поясняется примерами:

$$6 \times 2 = 12, \quad 6 \times 8 = 48, \quad 6 \times 4 = 24.$$

Другие цифры подобным свойством не обладают. Но если бы  $C$  было 1, то первое частное произведение состояло бы не из четырех цифр, а только из трех. Остается, следовательно, всего одна возможность:  $C = 6$ .

Мы сейчас убедились, что  $C = 6$  и что, следовательно,  $A$  и  $B$  могут быть только: или 2, или 4, или 8. Но так как второе частное произведение состоит лишь из трех цифр, то  $A$  не может быть ни 4, ни 8. Значит,  $A = 2$ .

Для  $B$  остаются две возможности:  $B = 4$  и  $B = 8$ . Если бы при  $A = 2$  цифра  $B$  равнялась 4, то последнее частное произведение было бы трехзначное, а не четырехзначное. Следовательно,  $B = 8$ .

Итак, имеем:  $A = 2$ ;  $B = 8$ ;  $C = 6$ . Искомое число 286, а все умножение раскрывается в таком виде:

$$\begin{array}{r}
 286 \\
 \times 826 \\
 \hline
 1716 \\
 + 572 \phantom{0} \\
 2288 \phantom{00} \\
 \hline
 236236
 \end{array}$$

(Этот арифметический ребус почерпнут из бельгийского журнала «Сфинкс», специально посвященного математическим развлечениям.)

## 8. ДЕСЯТИЧНАЯ СИСТЕМА В КНИЖНЫХ ШКАФАХ

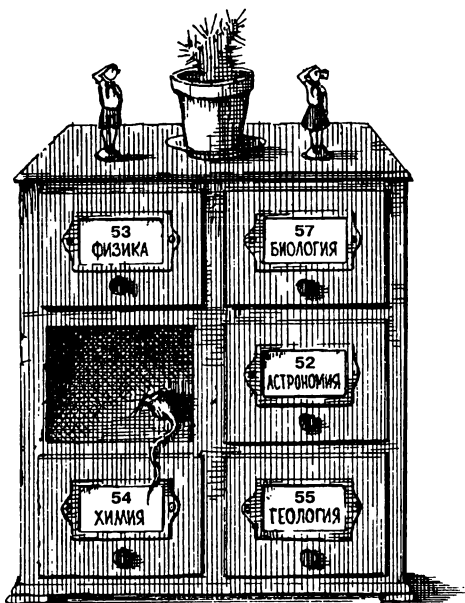
Десятичная система счисления находит себе, между прочим, применение там, где, казалось бы, этого и ожидать нельзя, именно — в библиотеках, при распределении книг по отделам.

Почти во всех массовых библиотеках употребляется такая система классификации<sup>1</sup> книг, при которой одна и та же книга имеет всюду одинако-

---

<sup>1</sup> Система классификации книг, о которой пишет Я. И. Перельман, была основана в начале века и применяется в наших библиотеках и по сей день. — *Примеч. ред.*





**Рис. 6.** Библиотечный каталог, составленный по десятичной системе.

вое числовое обозначение («шифр»). Система эта называется десятичной и избавляет читателя от необходимости справляться в каталоге при требовании книг того или иного отдела.

Система несложна и очень удобна. Сущность ее в том, что каждая отрасль знания имеет свое числовое обозначение, притом такое, что цифровой его состав *сам* говорит о месте, занимаемом данной отраслью в общей системе знания.

Все книги распределяются прежде всего по десяти главным отделам, которые обозначаются цифрами от 0 до 9:

0. Общий отдел.
1. Философские науки. Психология.
2. Религия. Теология.

3. Общественные науки.
4. Резервный раздел.
5. Математика и естественные науки.
6. Прикладные науки. Медицина. Техника.
7. Искусство. Декоративно-прикладное искусство. Фотография. Музыка. Игры. Спорт.
8. Языкознание. Лингвистика. Художественная литература. Литературоведение.
9. География. Биографии. История.

Первая цифра *шифра* (т. е. числового обозначения) по этой системе прямо указывает, к какому из сейчас перечисленных отделов книга относится. Каждая книга по философии имеет шифр, начинающийся с 1, книга по математике – с 5, по технике – с 6 и т. д. Видя шифр, начинающийся цифрой 8, вы, не раскрывая даже книги, знаете заранее, что она относится к отделу языкознания.

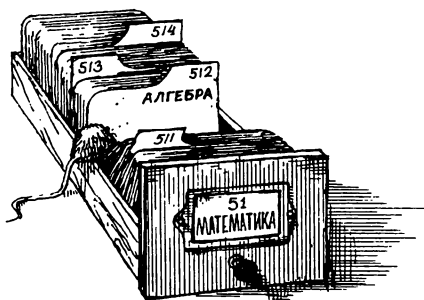
Далее, перечисленные отделы, в свою очередь, подразделяются каждый на 10 подотделов, которые тоже обозначаются цифрами от 0 до 9; цифры эти пишутся в шифре на втором месте. Например, отдел 5-й, содержащий физико-математические и естественнонаучные книги, подразделяется на такие подотделы:

50. Общие вопросы математических и естественных наук.
51. Математика.
52. Астрономия. Астрофизика. Исследование космического пространства. Геодезия.
53. Физика.
54. Химия. Кристаллография. Минералогия.
55. Геология. Геологические и геофизические науки.
56. Палеонтология.
57. Биологические науки.
58. Ботаника.
59. Зоология.

Сходным образом разбиваются и другие отделы. Например, в отделе прикладных наук (6) подотдел медицины имеет обозначение 61, сельского хозяйства – 63, торговли и путей сообщения – 65, химической промышленности и технологии – 66 и т. п. Таким же образом в 9-м отделе все книги по географии и путешествиям получают обозначение 91 и т. п.

Присоединяя к двум первым цифрам третью, характеризуют содержание книги еще точнее, указывая, к какому разряду данного подотдела она относится. Например, в подотделе математики (51) цифра 1 на третьем месте (511) говорит о том, что книга относится к арифметике; шифр 512 обозначает книги по алгебре, 514 – по геометрии. В отделе физики (53) книги по электричеству имеют шифр 537, по оптике – 535, по термодинамике – 536.

В библиотеке, устроенной по десятичной системе, нахождение нужной книги до крайности упрощается. Если вы интересуетесь геометрией, вы прямо идете к шкафам, где шифры начинаются с 5, отыскиваете тот шкаф, где хранятся книги с шифром 51... и пересматриваете в нем только те полки, где стоят книги с шифром 514...; здесь собраны все книги по геометрии, имеющиеся в данной библиотеке. Как бы обширна ни была библиотека, никогда не может случиться, что-



**Рис. 7.** Ящикек карточного библиотечного каталога.

бы какая-либо книга выпала из этой десятичной системы обозначений.

## 9. АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ЗНАКИ И НАЗВАНИЯ У РАЗНЫХ НАРОДОВ

Принято думать, что арифметические знаки до известной степени интернациональны, что они одинаковы у всех народов европейской культуры. Это верно лишь по отношению к большинству, но не ко всем.

Знаки «+» и «-», знаки «×» и «:» употребляются в одинаковом смысле и немцами, и французами, и англичанами. Но точка, как знак умножения, применяется не вполне тождественно разными народами. Одни пишут: 7.8, другие — 7·8, поднимая точку на середину высоты цифры. То же приходится сказать о знаке дробности, т. е. о знаке, отделяющем десятичную дробь от целого числа. Одни пишут, как мы: 4,5, другие — 4.5, третьи — 4·5, помещая точку выше середины. Англичане и американцы совсем опускают ноль перед десятичной дробью, чего на континенте Европы никто не делает. В американской книге вы встречаете такие обозначения, как .72,5 или ·725, или даже ,725 — вместо нашего: 0,725.

Расчленение числа на классы обозначается также не однообразно. В одних странах разделяют классы точками (15.000.000), в других — запятыми (15,000,000). У нас привился разумный обычай не помещать между классами никакого знака, а оставлять лишь пробел (15 000 000).

Поучительно проследить за тем, как меняется способ наименования одного и того же числа с переходом от одного языка к другому. Число 18, например, мы называем «восемнадцать», т. е. произносим сначала единицы (8), потом десятки (10). В такой же последовательности читает это число не-

мец: *achtzehn*, т. е. 8 – 10. Но француз произносит иначе: 10 – 8 (*dix-huit*).

Насколько разнообразны у разных народов способы наименования того же числа 18, показывает следующее извлечение из таблицы, составленной одним исследователем:

по-русски . . . . .	8–10
по-немецки . . . . .	8–10,
по-французски . . . . .	10–8,
по-армянски . . . . .	10 + 8,
по-гречески . . . . .	8 + 10,
по-латыни . . . . .	без 2 20,
по-новозеландски . . . . .	11 + 7,
по-валлийски . . . . .	3 + 5 – 10,
по-литовски . . . . .	8 сверх 10,
по-айнски . . . . .	10 – 2 сверх 10,
по-корякски . . . . .	3–5 сверх 10.

Курьезно наименование для того же числа 18 у одного гренландского племени: «с другой ноги 3». При всей своей необычности это название, естественно, объясняется способом счета по пальцам рук и ног. Раскроем его смысл:



Рис. 8. «С другой ноги 3».

число	пальцев	обеих рук	.....	10
— ”—	— ”—	одной ноги	.....	5
— ”—	— ”—	другой ноги	.....	3
				<hr/>
Итого.....				18

Сходным образом объясняется караибское наименование числа 18: «все мои руки, 3, моя рука» (т. е.  $10 + 3 + 5$ ).

## 10. КРУГЛЫЕ ЧИСЛА

Вероятно, все замечали на себе и на окружающих, что среди цифр есть излюбленные, к которым мы питаем особенное пристрастие. Мы, например, очень любим «круглые числа», т. е. оканчивающиеся на 0 или 5. В этом отношении сходятся вкусы не только европейцев и их предков, — например, древних римлян, — но даже многих первобытных народов других частей света.

Часто при переписи населения наблюдается чрезмерное обилие людей, возраст которых оканчивается на 5 или на 0; их гораздо больше, чем должно бы быть. Причина кроется, конечно, в том, что люди не помнят твердо, сколько им лет, и, показывая возраст, невольно «округляют» свои годы. Замечательно, что подобное же преобладание «круглых» возрастов наблюдается и на могильных памятниках древних римлян.

Эта одинаковость числовых пристрастий идет еще дальше. Один психолог подсчитал, как часто встречается в обозначениях возраста на древнеримских могильных плитах та или иная цифра, и сравнил эти результаты с повторяемостью цифр в обозначениях возраста по переписи в американском штате Алабама, где живут преимущественно негры. Получились удивительное согласие: древние римляне и современные нам негры до подроб-

ностей сходятся в числовых пристрастиях! Конечные цифры возраста, по частоте их повторяемости, располагались в обоих случаях в одинаковой последовательности, а именно:

0, 5, 8, 2, 3, 7, 6, 4, 9 и 1.

Но и это не все. Чтобы выяснить числовые пристрастия современных европейцев, упомянутый ученый производил такого рода опыты: он предлагал множеству лиц определить «на глаз», сколько миллиметров включает в себе полоска бумаги, например, в палец длиной, и записывал ответы. Подсчитав затем частоту повторения одних и тех же конечных цифр, ученый получил снова тот же самый ряд:

0, 5, 8, 2, 3, 7, 6, 4, 9 и 1.

Нельзя считать случайностью, что народы, столь отдаленные друг от друга и антропологически, и географически, обнаруживают полную одинаковость числовых симпатий, т. е. явное пристрастие к «круглым» числам, оканчивающимся на 0 или 5, и заметную неприязнь к числам «некруглым».

Любовь к пятеркам и десяткам находится, без сомнения, в прямой связи с десятичным основанием нашей системы счисления, т. е. с числом пальцев на обеих руках.

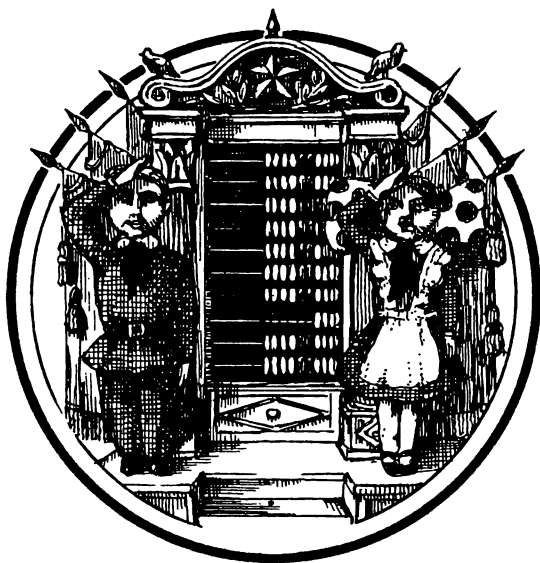
## ОТВЕТЫ НА РЕБУСЫ В ЗАДАЧЕ 6

Ребус 1. *Манускрипт.*

Ребус 2. *Экспертиза.*

Ребус 3. *Ракетобиль.*

Ребус 4. *Республика.*



*Глава вторая*

# Потомок древнего абака







## 11. ЧЕХОВСКАЯ ГОЛОВОЛОМКА

Припомним ту в своем роде знаменитую арифметическую задачу, которая так смутила семиклассника Зиберова из чеховского рассказа «Репетитор».

«Купец купил 138 аршин черного и синего сукна за 540 руб. Спрашивается, сколько аршин купил он того и другого, если синее сукно стоило 5 руб. за аршин, а черное — 3 руб.?»

С тонким юмором описывает Чехов, как беспомощно трудились над этой задачей и семиклассник-репетитор, и его ученик, 12-летний Петя, пока не выручил их Петин отец, Удодов:

«Петя повторяет задачу и тотчас же, ни слова не говоря, начинает делить 540 на 138.

— Для чего же вы делите? Постойте! Впрочем, так... продолжайте. Остаток получается? Здесь не может быть остатка. Дайте-ка я разделю!

Зиберов (репетитор) делит, получает 3 с остатком и быстро стирает.

«Странно... — думает он, ероша волосы, краснея. — Как же она решается? Гм!.. Эта задача на неопределенные уравнения, а вовсе не арифметическая».

Учитель глядит в ответы и видит: 75 и 63.

«Гм!... странно... Сложить 5 и 3, а потом делить 540 на 8? Так, что ли? Нет, не то!

— Решайте! — говорит он Пете.

— Ну, чего думаешь? Задача-то ведь пустяковая, — говорит Удодов Пете. — Экий ты дурак, братец! Решите уже вы ему, Егор Алексеич».

Егор Алексеич (репетитор) берет в руку грифель и начинает решать. Он заикается, краснеет, бледнеет.

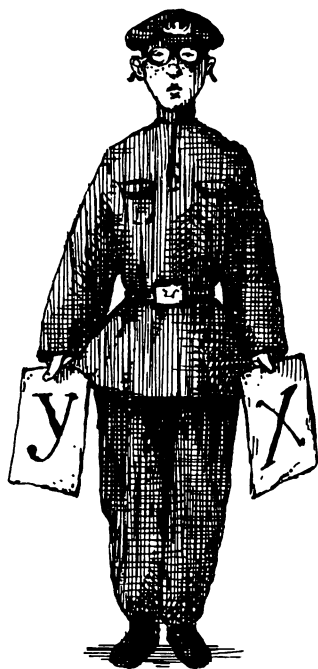


Рис. 9. «Эта задача, собственно говоря, алгебраическая...»

«Эта задача, собственно говоря, алгебраическая, — говорит он. — Ее с иксом и игреком решить можно... Впрочем, можно и так решить. Я вот разделил... Понимаете? Или вот что. Решите мне эту задачу к завтраму... Подумайте...

Петя ехидно улыбается. Удодов тоже улыбается. Оба они понимают замешательство учителя. Ученик VII класса еще пуще конфузится, встает и начинает ходить из угла в угол.

— И без алгебры решить можно, — говорит Удодов, протягивая руку к счётам и вздыхая. — Вот, извольте видеть...

Он щелкает на счетах, и у него получается 75 и 63, что и нужно было.



Рис. 10. «И без алгебры решить можно».

– Вот-с... по-нашему, по-неученому».

Эта история с задачей, заставляющая нас смеяться над конфузом злосчастного репетитора, задает нам сама три новых задачи.

1. Как намеревался репетитор решить задачу алгебраически?

2. Как должен был решить ее Петя?

3. Как решил ее отец Пети на счётах «по-неученому»?

### *Решение*

На первые два вопроса, вероятно, без труда ответят если не все, то весьма многие читатели нашей книжки. Третий вопрос не так прост. Но рассмотрим их по порядку.

1. Семиклассник-репетитор готов был решать задачу «с иксом и игреком», будучи уверен, что задача – «собственно говоря, алгебраическая». И он, надо думать, легко справился бы с ней, прибегнув к помощи системы уравнений (только не неопределенных, как ему казалось). Составить два уравнения с двумя неизвестными для данной задачи очень нетрудно, вот они:

$$x + y = 138, 5x + 3y = 540,$$

где  $x$  – число аршин синего, а  $y$  – черного сукна.

2. Однако задача легко решается и арифметически. Если бы вам пришлось решать ее, вы начали бы с предположения, что все купленное сукно было синее, – тогда за партию в 138 аршин синего сукна пришлось бы уплатить  $5 \times 138 = 690$  рублей; это на  $690 - 540 = 150$  рублей больше того, что было заплачено в действительности. Разница в 150 рублей указывает, что в партии имелось и более дешевое черное сукно по 3 рубля аршин. Дешевого

сукна было столько, что из двухрублевой разницы на каждом аршине составилось 150 рублей: очевидно, что число аршин черного сукна определится, если разделить 150 на 2. Получаем ответ: 75. Вычтя эти 75 аршин из общего числа 138 аршин, узнаем, сколько было синего сукна:  $138 - 75 = 63$ . Так и должен был решать задачу Петя.

3. На очереди третий вопрос: как решил задачу Удодов-старший?

В рассказе говорится очень кратко: «Он щелкает на счётах, и у него получается 75 и 63, что и нужно было». В чем, однако, состояло это «щелканье на счётах»? Каков способ решения задачи с помощью счётов? Разгадка такова: злополучная задача решается на счётах тем же приемом, что и на бумаге, — теми же арифметическими действиями. Но выполнение их упрощается, благодаря преимуществам, которые наши русские счёты предоставляют всякому, умеющему с ними обращаться. Очевидно, «отставной губернский секретарь» Удодов хорошо умел считать на счётах, потому что их косточки быстро, без помощи алгебры, открыли ему то, чего репетитор-семиклассник добивался узнать «с иксом и игреком». Проследим же, какие действия должен был проделать на счётах Петин отец.

Прежде всего ему нужно было, как мы знаем, умножить 138 на 5. Для этого он, по правилам действия на счётах, умножил сначала 138 на 10, т. е. просто перенес 138 одним рядом выше, а затем разделил это число пополам опять-таки на счётах. Деление начинают снизу: откидывают половину косточек, отложенных на каждой проволоке; если число косточек на данной проволоке нечетное, то выходят из затруднения, «раздробляя» одну косточку этой проволоки на 10 нижних.

В нашем, например, случае делят 1380 пополам так: на нижней проволоке, где отложено 8 косточек, откидывают 4 косточки (4 десятка), на средней проволоке из 3 косточек откидывают 1, а оставшуюся 1 косточку заменяют мысленно 10 нижними и делят пополам, добавляя 5 десятков к косточкам нижней; на верхней проволоке раздробляют одну косточку, прибавляя 5 сотен к косточкам средней проволоки. В результате на верхней проволоке совсем не остается косточек; на средней  $1 + 5 = 6$  сотен, на нижней  $4 + 5 = 9$  десятков. Итого 690 единиц. Выполняется все это быстро, автоматически.

Далее Удодов-старшему нужно было из 690 вычесть 540. Как проделывается это на счётах, — всем известно.

Наконец, полученную разность 150 оставалось разделить пополам: Удодов откинул из 5 косточек (десятков) 2, отдав 5 единиц нижнему ряду косточек; потом из 1 косточки на проволоке сотен отдал 5 десятков нижнему ряду: получилось 7 десятков и 5 единиц, то есть 75.

Все эти простые действия выполняются на счётах, конечно, гораздо скорее, чем тут описано.



Рис. 11. Русские счёты.

## 12. СЧЁТЫ

Есть много полезных вещей, которые мы не ценим только потому, что, находясь постоянно у нас под руками, они превратились в слишком обыденный предмет домашнего обихода. К числу таких

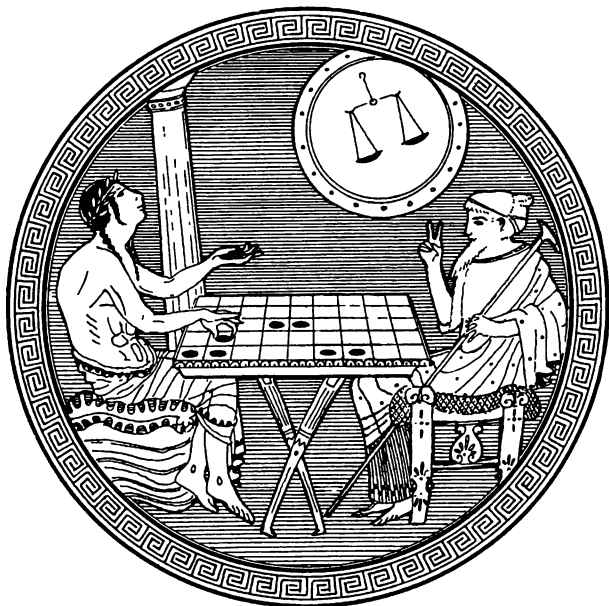


Рис. 12. Древние употребляли при вычислениях счетный прибор «абак».

недостаточно ценимых вещей принадлежат и наши конторские счёты – русская народная счетная машина, представляющая собою видоизменение знаменитого «абака», или «счётной доски» наших отдаленных предков<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Еще совсем недавно, как и во времена Я. И. Перельмана, счёты были почти в каждом доме. Кое-где они сохранились и до сих пор. Но теперь их быстро вытесняют калькуляторы. – *Примеч. ред.*



Древние народы – египтяне, греки, римляне – употребляли при вычислениях счетный прибор «абак». Это была доска (стол), разграфленная на полосы, по которым передвигали особые шашки, игравшие роль косточек наших счётов. Такой вид имел греческий абак. Абак римский имел форму медной доски с желобами (прорезами), в которых передвигались кнопки.

Родствен абаку перуанский «кипу» – ряд ремней или бечевок с завязанными на них узлами: этот счетный прибор получил особенное распространение среди первых обитателей Южной Америки, но, без сомнения, был в употреблении также и в Европе (см. далее задачу 15 «Отголоски старины»).

В Средние века, вплоть до XVI века, подобные приспособления были широко распространены в Европе. Но теперь видоизмененный абак – счёты – сохранился, кажется, только у нас да в Китае (семико-

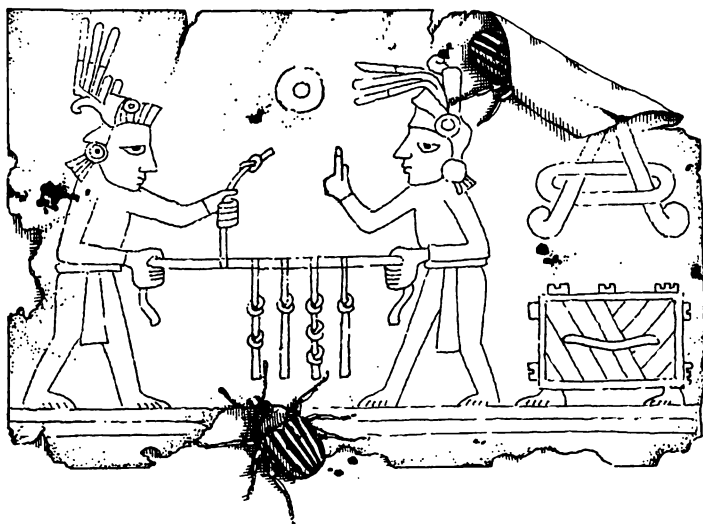


Рис. 13. Счетный прибор древних перуанцев «кипу».

**Рис. 14.** Семикосточковые счёты распространены в Китае и Японии с древних времен.

сточковые счёты — «суан-пан»<sup>1)</sup> и Японии (тоже семикосточковые счёты — «соробан»). Каждый грамотный человек умеет там выполнять на таких счётах четыре арифметических действия.



Между тем Запад почти не знает счётов, — вы не найдете их ни в одном магазине Европы, и только в начальных школах имеются огромные счёты — наглядное классное пособие при обучении нумерации. Быть может, потому-то мы и не ценим этого счетного прибора так высоко, как он заслуживает, а смотрим на него как на наивную кустарную самодельщину в области счетных приборов. Японцы ценят свои счёты высоко. Вот как отзывается о соробане один японский ученый: «Несмотря на свою древность, соробан превосходит все современные счетные приборы легкостью обращения с ним, простотой устройства и дешевизною».

Мы тоже вправе были бы гордиться нашими конторскими счётами, так как при изумительной

---

<sup>1</sup> Суан-пан изготавливают всевозможных размеров, до самых миниатюрных (у меня имеется китайский суан-пан — брелок в 17 мм длины и 8 мм ширины). Употребляются также и 6-косточковые счёты: 5 косточек по одну сторону планки, одна — по другую. (На имеющемся у меня образчике 21 ряд косточек.)

простоте устройства они по достигаемым на них результатам могут соперничать в некоторых отношениях даже со сложными, дорогостоящими счетными машинами. В умелых руках этот нехитрый прибор делает порою настоящие чудеса.

Один специалист, работавший до революции в крупной русской фирме по продаже счетных машин, рассказывал мне, что ему не раз приходилось изумлять русскими счётами иностранцев, привозивших образцы сложных счетных механизмов. Он устраивал состязания между двумя счетчиками, из которых один работал на дорогой заграничной «аддиционной» машине (т. е. машине для сложения), другой же пользовался обыкновенными счётами. И случалось, что последний – правда, большой мастер своего дела – брал верх над обладателем заморской диковинки в быстроте и точности вычислений. Бывало и так, что иностранец, пораженный быстротой работы на счётах, сразу же сдавался и укладывал свою машину в чемодан, не надеясь продать в России ни одного экземпляра.

– К чему вам дорогие счетные машины, если вы так искусно считаете при помощи ваших дешевых счётов? – говорили нередко представители иностранных фирм.

Правда, на русских счётах нельзя производить всех тех действий, которые выполняются машинами. Нынешние счетные машины, конечно, оставляют далеко позади наши счёты. Но во многом – например, в сложении и вычитании – счёты могут соперничать со сложными приборами. Впрочем, в искусных руках умножение и деление также значительно ускоряются на счётах, если знать приемы выполнения этих действий.

Познакомимся с некоторыми из них.

### 13. УМНОЖЕНИЕ НА СЧЁТАХ

Вот несколько приемов, пользуясь которыми всякий умеющий быстро *складывать* на счётах сможет проворно выполнять встречающиеся на практике примеры *умножения*.

Умножение на 2 и на 3 заменяется двукратным и троекратным сложением.

При умножении на 4 умножают сначала на 2 и складывают этот результат с самим собой.

Умножение числа на 5 выполняется на счётах так: переносят все число одной проволокой выше, то есть умножают его на 10, а затем делят это 10-кратное число пополам (как делить на 2 с помощью счётов – мы уже объяснили выше, на стр. 36–37).

Вместо умножения на 6 умножают на 5 и прибавляют умножаемое.

Вместо умножения на 7 умножают на 10 и отнимают умножаемое три раза.

Умножение на 8 заменяют умножением на 10 минус два умножаемых.

Точно так же умножают на 9: заменяют умножением на 10 минус одно умножаемое.

При умножении на 10 переносят, как мы уже сказали, все числа одной проволокой выше.

Читатель, вероятно, уже сам сообразит, как надо поступать при умножении на числа, большие 10, и какого рода замены тут окажутся наиболее удобными. Множитель 11 надо, конечно, заменить на  $10 + 1$ . Множитель 12 заменяют на  $10 + 2$  или практически – на  $2 + 10$ , т. е. сначала откладывают удвоенное число, а затем прибавляют удесятеренное. Множитель 13 заменяется на  $10 + 3$  и т. д.

Рассмотрим несколько особых случаев для множителей первой сотни:

$$20 = 10 \times 2,$$

$$22 = 11 \times 2,$$

$$25 = (100 : 2) : 2,$$

$$26 = 25 + 1,$$

$$27 = 30 - 3,$$

$$32 = 22 + 10,$$

$$42 = 22 + 20,$$

$$43 = 33 + 10,$$

$$45 = 50 - 5,$$

$$63 = 33 + 30$$

и т. д.

Легко видеть, между прочим, что с помощью счётов очень удобно умножать на такие числа, как на 22, 33, 44, 55 и т. п.; поэтому надо стремиться при разбивке множителей пользоваться подобными числами с одинаковыми цифрами.

К сходным приемам прибегают и при умножении на числа, большие 100. Если подобные искусственные приемы утомительны, то мы всегда, конечно, можем умножить с помощью счётов по общему правилу, умножая каждую цифру множителя и записывая частные произведения — это все же дает некоторое сокращение времени.

## 14. ДЕЛЕНИЕ НА СЧЁТАХ

Выполнять с помощью конторских счётов деление гораздо труднее, чем умножать; для этого нужно запомнить целый ряд особых приемов, подчас довольно замысловатых. Интересующимся ими придется обратиться к специальным руководствам. Здесь укажу лишь, ради примера, удобные приемы деления с помощью счётов на числа первого десятка (кроме числа 7, способ деления на которое чересчур сложен).

Как делить на 2, мы уже знаем (см. выше задачу 11), способ этот очень прост.

Гораздо сложнее — прием деления на 3: он состоит в замене деления умножением на бесконечную периодическую дробь  $0,333...$  (известно, что  $0,333... = 1/3$ ). Умножать с помощью счётов на 3 мы умеем; уменьшить в 10 раз тоже несложно: надо лишь переносить делимое одной проволокой ни-

же. После недолгого упражнения этот прием деления на 3, на первый взгляд длинноватый, оказывается довольно удобным на практике.

Деление на 4, конечно, заменяется двукратным делением на 2.

Еще проще деление на 5: его заменяют делением на 10 и удвоением результата.

На 6 делят в два приема: сначала делят на 2, потом полученное делят на 3.

Деление на 7, как мы уже сказали, выполняется с помощью счётов чересчур сложно, и потому здесь излагать его не будем.

На 8 делят в три приема: сначала на 2, потом полученное вновь на 2 и затем еще раз на 2.

Очень интересен прием деления на 9. Он основан на том, что  $1/9 = 0,1111\dots$ . Отсюда ясно, что вместо деления на 9 можно последовательно складывать  $0,1$  делимого +  $0,01$  его и т. д.<sup>1</sup>

Всего проще, как видим, делить на 2, 10 и 5 и, конечно, на такие кратные им числа, как 4, 8, 16, 20, 25, 40, 50, 75, 80, 100. Эти случаи деления не представляют трудности и для малоопытного счетчика.

## 15. ОТГОЛОСКИ СТАРИНЫ

С отдаленными предками наших конторских счётов связаны некоторые пережитки старины в языке и обычаях. Мало кто подозревает, например, что, собственно, мы делаем, завязывая иногда «для памяти» узелок на носовом платке. Мы повторяем то, что в древности с большим смыслом делали наши предки, «записывая» таким образом итог счета на шнурках. Веревка с узлами представляла собой некогда счетный прибор, в принципе аналогичный нашим счётам и, без сомнения, связанный с ними

---

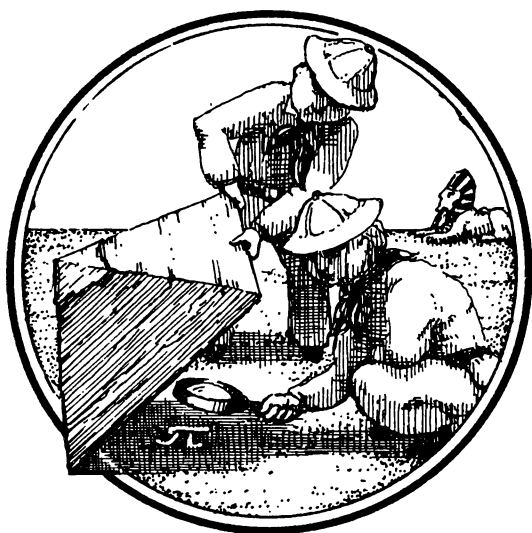
<sup>1</sup> Этот прием полезен и для устного деления на 9.

общностью происхождения. Это — «веревочный абак». Однократно завязанный узел на веревке означал 10, двукратно — 100, троекратно — 1000 и т. д.

С абакom же связаны и такие распространенные теперь слова, как «банк» и «чек». «Банк» по-немецки означает *скамья*. Что же общего между финансовым учреждением — «банком» в современном смысле слова — и скамьей? Оказывается, здесь далеко не простое совпадение названий. *Абак* в форме *скамьи* был широко распространен в торговых кругах Германии в XV–XVI веках, куда он проник из Италии; каждая меняльная лавка или банковская контора прежде всего характеризовалась присутствием «счетной скамьи», — естественно, что скамья стала синонимом банка.

Более косвенное отношение к абаку имеет слово «чек». Оно производится от слова «чекерд» (графленый на клетки). Так называли разграфленную в форме абакa кожаную салфетку, которую в XVI–XVII веках английские коммерсанты носили с собой в свернутом виде и, в случае надобности произвести подсчет, развертывали на столе. Бланки для расчетов графились по образцу этих свертывающихся абакoв, и неудивительно, что на них перенесено было в сокращенном виде само название этих счетных приборов: от слова «чекерд» произошло слово «чек».

Любопытно, откуда произошло выражение «остаться на бобах», которое мы применяем теперь к человеку, проигравшему все свои деньги. Оно также относится к тому времени, когда все денежные расчеты производились на абакe, на счетном столе или скамье с помощью *бобов*, заменявших косточки наших счётов. «Один считает на камешках, другой — на бобах», — читаем у Кампанеллы в «Городе Солнца» (1602). Человек, проигравший свои деньги, оставался с одними бобами, выражавшими сумму его проигрыша, — отсюда и соответствующий оборот речи.

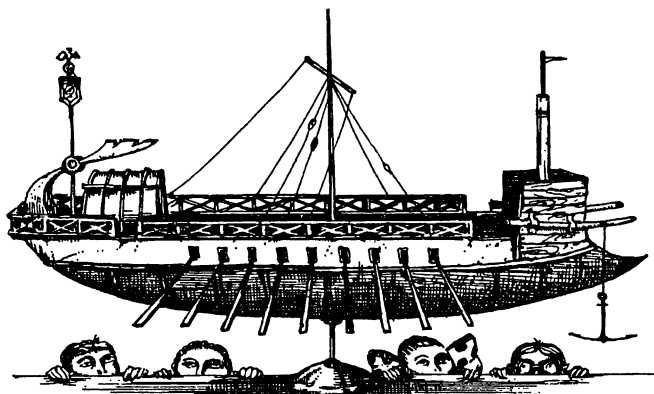


*Глава третья*

Немного истории







## 16. «ТРУДНОЕ ДЕЛО – ДЕЛЕНИЕ»

Зажигая привычным движением спичку, мы иной раз еще задумываемся над тем, скольких трудов стоило добывание огня нашим предкам, даже не очень отдаленным. Но мало кто подозревает, что нынешние способы выполнения арифметических действий тоже не всегда были так просты и удобны, так прямо и быстро приводили к результату.

Предки наши пользовались гораздо более громоздкими и медленными приемами. И если бы школьник XX века мог перенестись за четыре, за три века назад, он поразил бы наших предков быстротой и безошибочностью своих арифметических выкладок. Молва о нем облетела бы окрестные школы и монастыри, затмив славу искуснейших счетчиков той эпохи, и со всех сторон приезжали бы учиться у нового великого мастера счетного дела.

Особенно сложны и трудны были в старину действия умножения и деления — особенно последнее. «Умножение — мое мученье, а с делением — беда», — говорили в старину. Тогда не существовало еще, как теперь, одного выработанного практикой приема для каждого действия. Напротив, в ходу была одновременно чуть не дюжина различных способов умножения и деления — приемы один другого запутаннее, твердо запомнить которые не в силах был человек средних способностей. Каждый учитель

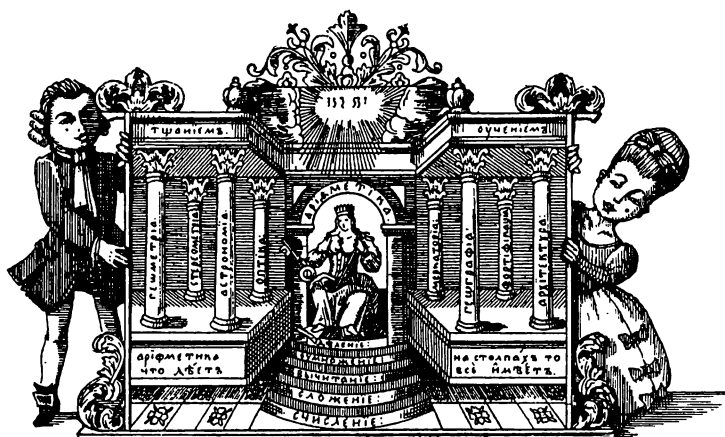


Рис. 15. Заставка из «Арифметики» Магницкого (издание 1703 года)

Рисунок изображает «Храм мудрости». Мудрость сидит на престоле, на ступенях которого поименованы арифметические действия. На колоннах перечислены науки, в которых арифметика находит себе применение: геометрия, стереометрия, астрономия, оптика (знания, добываемые «тщанием»), меркатория (т. е. картография), география, фортификация, архитектура (знания, добываемые «учением»). Надпись внизу поясняет: «Арифметика что деет на столпах то все имеет».

счетного дела держался своего излюбленного приема, каждый «магистр деления» (были такие специалисты) восхвалял собственный способ выполнения этого действия.

В книге В. Беллюстина «Как постепенно дошли люди до настоящей арифметики» (1914 г.) изложено 27 способов умножения, причем автор замечает: «весьма возможно, что есть и еще (способы), скрытые в тайниках книгохранилищ, разбросанные в многочисленных, главным образом, рукописных сборниках».

И все эти приемы умножения — «шахматный, или органчиком», «загибанием», «по частям, или в разрыв», «крестиком», «решеткой», «задом наперед», «алмазом» и прочие<sup>1</sup>, а также все способы деления, носившие не менее затейливые наименования, соперничали друг с другом в громоздкости и сложности. Усваивались они с большим трудом и лишь после продолжительной практики. Признавалось даже, что для овладения искусством быстрого и безошибочного умножения и деления многозначных чисел нужно особое природное дарование, исключительные способности; рядовым людям премудрость эта недоступна.

«Трудное дело деление» (*dura cosa e la partita*) — гласила старинная итальянская поговорка; оно и в самом деле было трудно, если принять во внимание те утомительные методы, какими выполнялось тогда это действие. Нужды нет, что способы эти носили подчас довольно игривые названия: под веселым названием скрывался длиннейший ряд запутанных манипуляций.

---

<sup>1</sup> Перечисленные примеры умножения указаны в старинной «Арифметике» Николая Тарталья (XVI в.). Наш современный способ умножения описывается там под названием «шахматного».

В XVI веке кратчайшим и удобнейшим способом считалось, например, деление «лодкой, или галерой». Знаменитый итальянский математик того времени Николай Тарталья в своем обширном учебнике арифметики писал об этом способе следующее:

«Второй способ деления называется в Венеции<sup>1</sup> лодкой, или галерой, вследствие некоторого сходства фигуры, получающейся при этом, потому что при делении некоторых родов чисел составляется

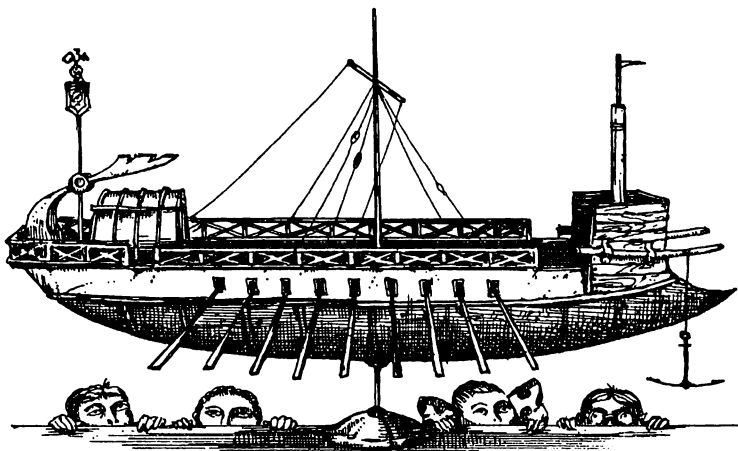


Рис. 16. Старинный способ деления лодкой, или галерой.

фигура, похожая на лодку, а в других – на галеру, которая в самом деле красиво выглядит; галера получается иной раз хорошо отделанная и снаб-

---

<sup>1</sup> Венеция и некоторые другие государства Италии в XIV–XVI столетиях вели обширную морскую торговлю, и потому в этих странах приемы счета были, ради торговых надобностей, разработаны раньше, чем в других. Лучшие труды по арифметике появились в Венеции. Многие итальянские термины торговой арифметики сохранились еще в настоящее время.

женная всеми принадлежностями – выкладывается из чисел так, что она действительно представляется в виде галеры с кормою и носом, мачтою, парусами и веслами».

Читается это очень весело: так и настраиваешься скользить по числовому морю на парусах арифметической галеры. Но хотя старинный математик и рекомендует этот способ как «самый изящный, самый легкий, самый верный, самый употребительный и самый общий из существующих, пригодный для деления всех возможных чисел», – я не решаюсь его изложить здесь из опасения, что даже терпеливый читатель закроет книгу в этом скучном месте и не станет читать дальше. Между тем этот утомительный способ действительно был самым лучшим в ту эпоху. У нас он употреблялся до середины XVIII века: в «Арифметике» Леонтия Магницкого<sup>1</sup> он описан в числе шести предлагаемых там способов (из которых ни один не похож на современный) и особенно рекомендуется автором; на протяжении своей объемистой книги – 640 страниц большого формата – Магницкий пользуется исключительно «способом галеры», не употребляя, впрочем, этого наименования.

В заключение покажем читателю эту числовую «галеру», воспользовавшись примером из упомянутой книги Тартальи.

---

<sup>1</sup> Старинный русский учебник математики, охватывающий все ее отделы, известные в ту эпоху (включая и сведения из мореходной астрономии). Это – одна из тех двух книг, которые Ломоносов назвал «вратами своей учености». Подробное заглавие ее таково:

«Арифметика, сиречь наука числительная, повелением царя Петра Алексеевича в великом граде Москве типографским тиснением ради обучения мудролюбивых российских отроков и всякого чина и возраста людей на свет произведена в лето от рождества бога слова 1703».

	4 6	
88	1 3	08
0999	09	199
1660	19	0860
88876	0876	08877
09999480000000199480000000199994		
1666660000000086660000000866666		
Делимое – 8888880000000088880000000888888		(88 – частное)
Делитель <sup>1</sup> – 999990000000009990000000099999		
9999900000000099900000000099		



Добравшись после утомительных трудов до желанного конца арифметического действия, предки наши считали необходимым непременно проверить этот в поте лица добытый итог. Громоздкие приемы вызывали недоверие к их результатам. На длинном, извилистом пути легче заблудиться, чем на прямой дороге современных приемов. Отсюда естественно возник старинный обычай *проверять* каждое выполняемое арифметическое действие – похвальное правило, которому не мешало бы следовать и нам.

## II

Любимым приемом проверки был так называемый «способ девятки». Этот изящный прием нередко описывается и в современных арифметических учебниках, особенно иностранных.

Проверка девяткой основана на «правиле остатков», гласящем: остаток от деления суммы на какое-

<sup>1</sup> Последние две девятки приписаны к делителю в процессе деления.

либо число равен сумме остатков от деления каждого слагаемого на то же число. Точно так же остаток произведения равен произведению остатков множителей. С другой стороны, известно также<sup>1</sup>, что при делении числа на 9 получается тот же остаток, что и при делении на 9 суммы цифр этого числа; например, 758 при делении на 9 дает остаток 2, и то же получается в остатке от деления  $(7 + 5 + 8)$  на 9.

Сопоставив оба указанных свойства, мы и приходим к приему проверки девяткой, т. е. делением на 9. Покажем на примере, в чем он состоит.

Пусть требуется проверить правильность сложения следующего столбца:

$$\begin{array}{r}
 38\ 932 \dots\dots\dots 7 \\
 + \quad 1\ 096 \dots\dots\dots 7 \\
 4\ 710\ 043 \dots\dots\dots 1 \\
 \underline{589\ 106 \dots\dots\dots 2} \\
 5\ 339\ 177 \dots\dots\dots 8
 \end{array}$$

Составляем в уме сумму цифр каждого слагаемого, причем в получающихся попутно двузначных числах также складываем цифры (делается это в самом процессе сложения цифр), пока в конечном результате не получим однозначное число. Результаты эти (остатки от деления на 9) записываем, как показано на примере, рядом с соответствующими слагаемыми. Складываем все остатки

$(7 + 7 + 1 + 2 = 17; 1 + 7 = 8)$ , — получаем 8.

Такова же должна быть сумма цифр итога (5 339 177), если действие выполнено верно:

$$\begin{array}{l}
 5 + 3 + 3 + 9 + 1 + 7 + 7, \\
 \text{после всех упрощений, равно } 8.
 \end{array}$$

---

<sup>1</sup> Выясняется попутно при выводе признака делимости на 9.



Проверка *вычитания* выполняется точно так же, если принять уменьшаемое за сумму, а вычитаемое и разность — за слагаемые. Например:

$$\begin{array}{r} 6913 \dots\dots\dots 1 \\ - 2587 \dots\dots\dots 4 \\ \hline 4326 \dots\dots\dots 6 \end{array}$$

$$4 + 6 = 10; \quad 1 + 0 = 1.$$

Особенно удобен этот прием в применении к проверке действия умножения, как видно из следующего примера:

$$\begin{array}{r} \times 8713 \dots\dots\dots \times 1 \\ \times 264 \dots\dots\dots \times 3 \\ \hline 34852 \dots\dots\dots 3 \\ 52278 \\ 17426 \\ \hline 2300232 \dots\dots\dots 3. \end{array}$$

Если при такой проверке умножения обнаружена будет ошибочность результата, то, чтобы определить, где именно кроется ошибка, можно проверить способом девятки каждое частное произведение отдельно; а если здесь ошибки не окажется, остается проверить лишь *сложение* частных произведений.

Как по этому способу проверять деление? Если у нас случай деления без остатка, то делимое рассматривается как произведение делителя на частное. В случае же деления с остатком пользуются тем, что

$$\text{делимое} = \text{делитель} \times \text{частное} + \text{остаток}.$$

Например,

$$16 \ 201 \ 387 : 4457 = 3635; \text{остаток } 192$$

$$\begin{array}{ccccccc} \underbrace{\hspace{1.5cm}} & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & \underbrace{\hspace{1.5cm}} \\ \text{сумма цифр:} & 1 & 2 & 8 & 3 \end{array}$$

$$2 \times 8 + 3 = 19; \quad 1 + 9 = 10; \quad 1 + 0 = 1.$$

Привожу из «Арифметики» Магницкого предлагаемое там для проверки девяткой удобное расположение:

Для умножения:

$$\begin{array}{r}
 \times \begin{array}{r} 365 \\ 24 \end{array} \\
 \hline
 1460 \\
 730 \\
 \hline
 8760
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 5 \\
 3 \text{ — } 3 \\
 6
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \text{«Сие 3 — 3 сему согласно, убо добре есть»} \\
 \end{array}$$

Для деления:

	частного
	8
делимого	1 — 1
делителя	2
	16
остатка	3
Всех	1

«Согласно добре делил».

Подобная проверка действий, без сомнения, не оставляет желать лучшего в смысле быстроты и удобства. Нельзя сказать того же о ее надежности: ошибка может и ускользнуть от нее. Действительно, одну и ту же сумму цифр могут иметь разные числа; не только перестановка цифр, но иной раз даже и замена одних другими остаются при такой проверке обнаруженными. Укрываются от контроля также лишние девятки и нули, потому что не влияют на сумму цифр. Всецело полагаться поэтому на такой прием проверки было бы неосмотрительно.

Предки наши сознавали это и не ограничивались одной лишь проверкой с помощью девятки, но производили еще дополнительную проверку — чаще всего с помощью *семерки*. Этот прием осно-

ван на том же «правиле остатков», но не так удобен, как способ девятки, потому что деление на 7 приходится выполнять полностью, чтобы найти остатки (а при этом легко возможны ошибки в действиях самой проверки).

Две проверки – девяткой и семеркой – являются уже гораздо более надежным контролем: что ускользнет от одной, будет уловлено другой. Ошибка не обнаружится лишь в том случае, если разность истинного и полученного результатов кратна числу  $7 \times 9 = 63$ . Так как подобная случайность все же возможна, то и двойная проверка не дает полной уверенности в правильности результата.

Впрочем, для обычных вычислений, где ошибаются чаще всего на 1 или 2 единицы, можно ограничиться только проверкой девяткой. Дополнительная проверка семеркой чересчур обременительна. Только тот контроль хорош, который не мешает работе.

Если тем не менее, выполняя ответственное вычисление, вы пожелаете для надежности произвести двойную проверку, то вместо делителя 7 лучше пользоваться делителем 11. При этом дело можно значительно упростить, применив следующий удобный признак делимости на 11: число разбивают на грани справа налево, по две цифры в каждой (самая левая грань может заключать и одну цифру); грани складывают, и полученная сумма будет «равноостаточна» с испытуемым числом по делителю 11 – сумма граней дает при делении на 11 тот же остаток, что и испытуемое число.

Поясним сказанное примером. Требуется найти остаток от деления 24 716 на 11. Разбиваем число на грани и складываем их:

$$2 + 47 + 16 = 65.$$

Так как 65 при делении на 11 дает в остатке 10, то и число 24 716 дает при делении на 11 тот же ос-

таток. Обоснование этого приема дается в моей книге «Живая математика».

Я предлагаю этот способ потому, что он одновременно дает и число, равноостаточное с испытуемым также по делителю 9. Таким образом, мы имеем возможность удобно произвести проверку сразу посредством двух делителей: 9 и 11. От такой проверки может ускользнуть только ошибка, кратная 99, т. е. весьма маловероятная.

## 17. ХОРОШО ЛИ МЫ УМНОЖАЕМ?

Старинные способы умножения были неуклюжи и неудобны, но так ли хорош наш нынешний способ, чтобы в нем невозможны были уже никакие дальнейшие улучшения? Нет, и наш способ не является совершенным; можно придумать еще более быстрые или еще более надежные.

Из нескольких предложенных улучшений укажем пока только одно, увеличивающее не быстроту выполнения действия, а его надежность. Оно состоит в том, что при многозначном множителе начинают с умножения не на последнюю, а на *первую цифру* множителя. Выполненное в задаче 16 умножение  $8713 \times 264$  примет при этом такой вид:

$$\begin{array}{r} \phantom{\times} 8713 \\ \times \phantom{00} 264 \\ \hline 17426 \\ \phantom{00} 52278 \\ \phantom{000} 34852 \\ \hline 2300232 \end{array}$$

Как видим, последнюю цифру каждого частного произведения подписывают под той цифрой множителя, на которую умножают.

Преимущество подобного расположения в том, что цифры частных произведений, от которых зависят первые, наиболее ответственные цифры результата, получаются в *начале* действия, когда внимание еще не утомлено и, следовательно, вероятность сделать ошибку меньшая. (Кроме того, способ этот упрощает применение так называемого «сокращенного» умножения, о котором здесь мы распространяться не можем.)

## 18. «РУССКИЙ» СПОСОБ УМНОЖЕНИЯ

Вы не можете выполнить умножения многозначных чисел, — хотя бы даже двузначных, — если не помните наизусть всех результатов умножения однозначных чисел, т. е. того, что называется таблицей умножения. В старинной «Арифметике» Магницкого, о которой мы уже упоминали, необходимость твердого знания таблицы умножения воспета в таких (чуждых для современного слуха) стихах:

Аще кто не твердить  
таблицы и гордить,  
Не может познати  
числомъ что множати  
И по все науки  
несвободъ от муки,  
Колико не учить  
туне ся удручить  
И в пользу не будетъ  
аще ю забудеть.

Автор этих стихов, очевидно, не знал или упустил из виду, что существует способ перемножать числа и без знания таблицы умножения. Способ этот, похожий на наши школьные приемы, упо-

треблен был в обиходе русских крестьян и унаследован ими от глубокой древности.

Сущность его в том, что умножение любых двух чисел сводится к ряду последовательных делений одного числа пополам при одновременном удвоении другого числа. Вот пример:

$$\begin{array}{rcl} 32 & \times & 13 \\ 16 & \times & 26 \\ 8 & \times & 52 \\ 4 & \times & 104 \\ 2 & \times & 208 \\ 1 & \times & 416 \end{array}$$

Деление пополам продолжают до тех пор, пока в частном не получится 1, параллельно удваивая другое число. Последнее удвоенное число и дает искомый результат. Нетрудно понять, на чем этот способ основан: произведение не изменяется, если один множитель уменьшить вдвое, а другой — вдвое же увеличить. Ясно поэтому, что в результате многократного повторения этой операции получается искомое произведение.

Однако как поступить, если при этом приходится делить пополам число нечетное?

Народный способ легко выходит из этого затруднения. Надо, гласит правило, в случае нечетного числа откинуть единицу и делить остаток пополам; но зато к последнему числу правого столбца нужно будет *прибавить* все те числа этого столбца, которые стоят против *нечетных* чисел левого столбца — сумма и будет искомым произведением. Практически это делают так, что все строки с четными левыми числами зачеркивают; остаются только те, которые содержат слева нечетное число.

Приведем пример (звездочки указывают, что данную строку надо зачеркнуть):

$$\begin{array}{r}
 19 \times 17 \\
 9 \times 34 \\
 4 \times 68^* \\
 2 \times 136^* \\
 1 \times 272.
 \end{array}$$

Сложив незачеркнутые числа, получаем вполне правильный результат:  $17 + 34 + 272 = 323$ .

На чем основан этот прием?

Правильность приема станет ясна, если принять во внимание, что

$$\begin{array}{l}
 19 \times 17 = (18 + 1) \times 17 = 18 \times 17 + 17, \\
 9 \times 34 = (8 + 1) \times 34 = 8 \times 34 + 34 \\
 \text{и т. д.}
 \end{array}$$

Ясно, что числа 17, 34 и т. п., утрачиваемые при делении нечетного числа пополам, необходимо прибавить к результату последнего умножения, чтобы получить произведение.

## 19. ИЗ СТРАНЫ ПИРАМИД

Весьма вероятно, что описанный сейчас способ дошел до нас из глубочайшей древности и из отдаленной страны – из Египта. Мы мало знаем, как производили арифметические действия обитатели древней Страны пирамид. Но сохранился любопытный документ – папирус, на котором записаны арифметические упражнения ученика одной из землемерных школ Древнего Египта. Это – так называемый «папирус Ринда», относящийся ко времени между 2000 и 1700 гг. до нашей эры<sup>1</sup> и пред-

---

<sup>1</sup> Папирус был разыскан английским египтологом Генри Риндом; он оказался заключенным в металлический футляр. В развернутом виде он имеет 20 м длины при 30 см ширины. Хранится в Британском музее, в Лондоне.

ставляющий собой копию еще более древней рукописи, переписанную неким Ахмесом. Писец<sup>1</sup> Ахмес, найдя «ученическую тетрадку» этой отдаленнейшей эпохи, тщательно переписал все арифметические упражнения будущего землемера — вместе с их ошибками и исправлениями учителя, — и дал своему списку торжественное заглавие, которое дошло до нас в следующем неполном виде:

**«Наставление, как достигнуть знания всех темных вещей... всех тайн, сокрытых в вещах.**

**Составлено при царе Верхнего и Нижнего Египта Ра-а-усе, дающем жизнь, по образцу древних сочинений времен царя Ра-ен-мата писцом Ахмесом».**

В этом интересном документе, насчитывающем за собой около 40 веков и свидетельствующем о еще более глубокой древности, мы находим четыре примера умножения, выполненные по способу, живо напоминающему наш русский народный способ.

Вот эти примеры (точки впереди чисел обозначают число единиц множителя; знаком «+» мы отметили числа, подлежащие сложению):

$(8 \times 8)$	$(9 \times 9)$
.8	.9 +
..16	..18
....32	....36
::::64	::::72 +
	<hr/> Итог 81

---

<sup>1</sup> Звание «писец» принадлежало третьему классу египетских жрецов; в заведовании их находилось «все относившееся к строительной части храма и к его земельной собственности». Математические, астрономические и географические знания составляли их главную специальность (В. Бобынин).



$(8 \times 365)$	$(7 \times 2801)$
.365	.2801 +
..730	..5602 +
.... 1460	
::::2920	::::11204 +
	<hr/> Итог 19607

Вы видите из этих примеров, что еще за тысяче-летия до нас египтяне пользовались приемом умножения, довольно сходным с нашим крестьянским, и что неведомыми путями он как бы перекочевал из древней Страны пирамид в современную эпоху. Если бы обитателю земли фараонов предложили перемножить, например,  $19 \times 17$ , он произвел бы это действие следующим образом: написал бы ряд последовательных удвоений числа 17,

1	17 +
2	34 +
4	68
8	136
16	272 +

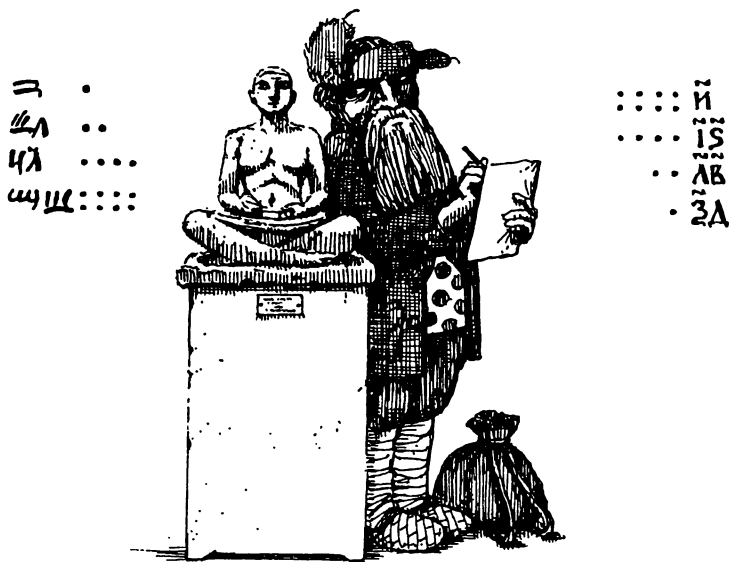
и затем сложил бы те числа, которые отмечены здесь знаком «+», т. е.  $17 + 34 + 272$ . Он получил бы, конечно, вполне правильный результат:

$$17 + (2 \times 17) + (16 \times 17) = 19 \times 17.$$

Легко видеть, что подобный прием, по существу, весьма близок к нашему «крестьянскому» (замена умножения рядом последовательных удвоений).

Трудно сказать, у одних ли наших крестьян был в ходу такой древний способ умножения; английские авторы называют его именно «русским крестьянским способом»; в Германии крестьяне кое-где хотя и пользуются им, но также называют его «русским».

Следовало бы вообще с большим вниманием относиться к народной математике: вникать в употребляемые народом приемы счета и измерений, собирать и записывать эти памятники народного математического творчества, дошедшие до нашего времени из глубин седой старины.



*Рис. 17. За тысячелетия до нашего времени египтяне пользовались тем же приемом умножения, каким совсем недавно пользовались русские крестьяне.*

На это давно указывал историк математики В. В. Бобынин, предложивший даже краткую программу собирания памятников народной математики. Не лишним будет, пожалуй, привести здесь составленный им перечень того, что именно следует собирать и записывать:

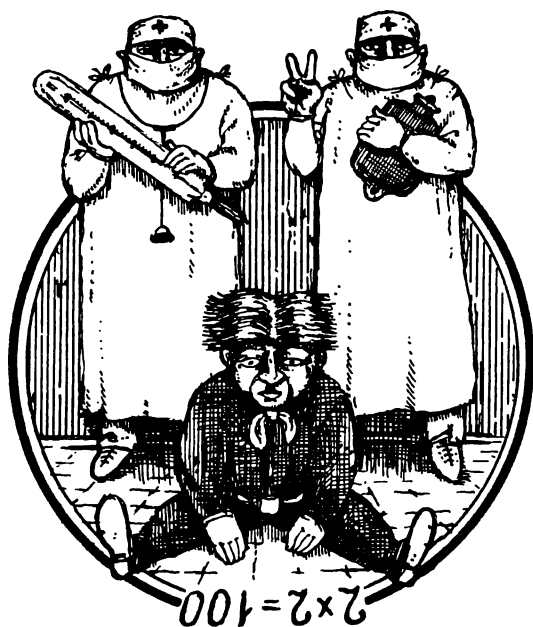
- 1) счисление и счет;
- 2) приемы меры и веса;

- 3) геометрические сведения и их выражение в постройках, нарядах и украшениях;
- 4) способы межевания;
- 5) народные задачи;
- 6) пословицы, загадки и вообще произведения народной словесности, имеющие отношение к математическим знаниям;
- 7) памятники древней народной математики, находящиеся в рукописях, музеях, коллекциях и т. д. или находимые при раскопках курганов, могил, городищ и пр.

В заключение привожу краткую справку о том, когда и где впервые появились общеупотребительные теперь знаки арифметических действий, обозначение дроби, степени и др.:

- $+$ ,  $-$  — в рукописях Леонардо да Винчи (1452 — 1519);
- $\times$  — в сочинении Утреда (1631);
- $.$ ,  $:$  — в сочинении Лейбница (1646 — 1716);
- $a/b$  — в сочинении Фибоначчи (1202);
- $a^n$  — в сочинении Шюке (1484);
- $=$  — в сочинении Рекорда (1557);
- $>$ ,  $<$  — в сочинении Гарриота (1631);
- $($ ,  $[$  ] — в сочинении Жирара (1629).

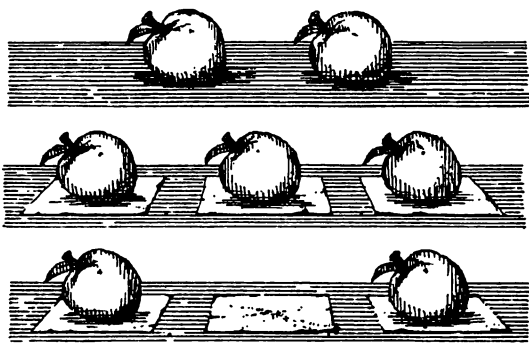
Тому, кто очень захочет подробнее познакомиться с историей арифметики, советую прочесть книгу В. Беллюстина «Как постепенно дошли люди до настоящей арифметики. Общедоступные очерки для любителей арифметики» (1914).



*Глава четвертая*

# Недесятичные системы счисления





Эту главу позволю себе начать с задачи, которую я придумал когда-то для читателей старого распространенного журнала<sup>1</sup> в качестве «задачи на премию». Вот она.

## 20. ЗАГАДОЧНАЯ АВТОБИОГРАФИЯ

В бумагах одного чудака-математика найдена была его автобиография. Она начиналась следующими удивительными строками:

«Я окончил курс университета 44 лет от роду. Спустя год, 100-летним молодым человеком, я женился на 34-летней девушке. Незначительная разница в возрасте – всего 11 лет – способствовала тому, что мы жили общими интересами и мечтами. Спустя немного лет у меня была уже и маленькая семья из 10 детей. Жалования я получал в месяц

---

<sup>1</sup> «Природа и люди» (потом она была перепечатана мною в сборнике Е. И. Игнатьева «В царстве смекалки»).

всего 200 рублей, из которых  $\frac{1}{10}$  приходилось отдавать сестре, так что мы с детьми жили на 130 руб. в месяц» и т. д.

Чем объяснить странные противоречия в числах этого отрывка?

Решение задачи подсказывается названием этой главы: *недесятичная система счисления* — вот единственная причина кажущейся противоречивости приведенных чисел. Напав на эту мысль, нетрудно догадаться, в какой именно системе счисления изображены числа *чужаком-математиком*. Секрет выдается фразой: «спустя год



Рис. 18. Загадочная биография, или «Неравный брак».

(после 44 лет), 100-летним молодым человеком...» Если от прибавления одной единицы число 44 преобразуется в 100, то, значит, цифра 4 — *наибольшая* в этой системе (как 9 — в десятичной), а, следовательно, основанием системы является 5.

Чудаку-математику пришла фантазия написать все числа своей биографии по *пятеричной* системе счисления, т. е. по такой, в которой единица высшего разряда не в 10, а в 5 раз больше единицы низшего; на первом справа месте стоят в ней простые единицы (не свыше четырех), на втором — не десятки, а пятерки; на третьем не сотни, а «двадцатипятерки» и т. д. Поэтому число, изображенное в тексте записки «44», означает не  $4 \times 10 + 4$ , как в десятичной системе, а  $4 \times 5 + 4$ , т. е. 24.

Точно так же число «100» в автобиографии означает одну единицу третьего разряда в пятеричной системе, т. е. 25.

Остальные числа записки соответственно означают:

$$\begin{aligned}\langle 34 \rangle &= 3 \times 5 + 4 = 19, \\ \langle 11 \rangle &= 5 + 1 = 6, \\ \langle 200 \rangle &= 2 \times 25 = 50, \\ \langle 10 \rangle &= 5 \\ \langle 1/_{10} \rangle &= 1/5, \\ \langle 130 \rangle &= 25 + 3 \times 5 = 40.\end{aligned}$$

Восстановив истинный смысл чисел записи, мы видим, что в ней никаких противоречий нет:

«Я окончил курс университета 24 лет от роду. Спустя год, 25-летним молодым человеком, я женился на 19-летней девушке. Незначительная разница в возрасте — всего 6 лет — способствовала тому, что мы жили общими интересами и мечтами. Спустя немного лет у меня была уже и маленькая



семья из 5 детей. Жалованья я получал в месяц всего 50 рублей, из которых  $\frac{1}{5}$  приходилось отдавать сестре, так что мы с детьми жили на 40 руб. в месяц».

Трудно ли изображать числа в других системах счисления?

Нисколько. Положим, вы желаете число 119 изобразить в пятеричной системе. Делите 119 на 5, чтобы узнать, сколько в нем единиц *первого* разряда:

$$119 : 5 = 23, \text{ остаток } 4.$$

Значит, число простых единиц будет 4. Далее, 23 пятерки не могут стоять все во втором разряде, так как высшая цифра в пятеричной системе — 4, и больше 4 единиц ни в одном разряде быть не должно. Делим поэтому 23 на 5;

$$23 : 5 = 4, \text{ остаток } 3.$$

Это показывает, что во втором разряде («пятерок») будет цифра 3, а в третьем («двадцатипятерок») цифра — 4.

Итак,  $119 = 4 \times 25 + 3 \times 5 + 4$  или, в *пятеричной* системе, «434».

Сделанные действия для удобства располагают так:

119	5	
4	23	5
	3	4

Курсивные цифры (при письме можно их подчеркивать) выписывают справа налево и сразу получают искомое изображение числа в иной системе: «434».

Приведем еще примеры.

1. Изобразить 47 в *троичной* системе.

*Решение:*

47	3		
2	15	3	
	0	5	3
		2	1

Ответ: «1202».

Проверка:  $1 \times 27 + 2 \times 9 + 0 \times 9 + 2 = 47$ .

2. Число 200 изобразить в *семеричной* системе.

*Решение:*

200	7	
60	28	7
4	0	4

Ответ: «404». Проверка:  $4 \times 49 + 0 \times 7 + 4 = 200$ .

3. Число 163 изобразить в *двенадцатеричной* системе.

*Решение:*

163	12	
156	13	12
7	1	1

Ответ: «117». Проверка:  $1 \times 144 + 1 \times 12 + 7 = 163$ .

Теперь читатель не затруднится изобразить любое число в какой угодно системе счисления. Единственная помеха может возникнуть лишь вследствие того, что в некоторых случаях не будет доставать *обозначений* для цифр. В самом деле, при изображении числа в системах с основанием более

десяти (например, в двенадцатеричной) может явиться надобность в цифрах «десять» и «одиннадцать». Из этого затруднения нетрудно выйти, избрав для новых цифр какие-нибудь условные знаки или буквы, – хотя бы, например, буквы К и Л, стоящие в русском алфавите на 10-м и 11-м местах.

4. Число 1579 в двенадцатеричной системе изобразится следующим образом:

$$\begin{array}{r}
 1579 \quad | \quad 12 \\
 \hline
 12 \quad | \quad 131 \quad | \quad 12 \\
 \hline
 37 \quad | \quad 11 \quad | \quad 10 \\
 \hline
 19 \\
 \hline
 7
 \end{array}$$

Ответ: «(10) (11) 7» или «КЛ7».

Проверка:  $10 \times 144 + 11 \times 12 + 7 = 1579$ .

5. Выразить число 1926 в двенадцатеричной системе<sup>1</sup>.

6. Выразить число 273 в двенадцатеричной системе<sup>2</sup>.

## 21. ПРОСТЕЙШАЯ СИСТЕМА СЧИСЛЕНИЯ

Нетрудно сообразить, что в каждой системе высшая цифра, какая может понадобиться, равна основанию этой системы без единицы. Например, в десятичной системе высшая цифра 9, в шестеричной – 5, в троичной – 2, в пятнадцатеричной – 14 и т. д.

---

<sup>1,2</sup> Ответы на вопросы 5 и 6 приведены в конце четвертой главы.

Самая простая система счисления, конечно, та, для которой требуется меньше всего цифр. В десятичной системе нужны 10 цифр (считая и 0), в пятеричной – 5 цифр, в троичной – 3 цифры (1, 2 и 0), в двоичной – только 2 цифры (1 и 0).

Существует ли и «единичная» система?

Конечно. Это система, в которой единица высшего разряда в один раз больше единицы низшего, т. е. равна ей; другими словами, «единичной» можно назвать такую систему, в которой единицы всех разрядов имеют *одинаковое* значение.

Это самая примитивная «система»; ею пользовался первобытный человек, делая на дереве зарубки по числу отсчитываемых предметов. Но между нею и всеми другими системами счета есть громадная разница: она лишена главного преимущества нашей нумерации – так называемого *позиционного (или поместного) значения цифр*.

Действительно: в «единичной» системе знак, стоящий на 3-м или 5-м месте, имеет то же значение, что и стоящий на первом месте. Между тем даже в двоичной системе единица на 3-м месте (справа) уже в 4 раза ( $2 \times 2$ ) больше, чем стоящая на первом, а на 5-м – в 16 раз больше ( $2 \times 2 \times 2 \times 2$ ).

Для изображения какого-нибудь числа по «единичной» системе нужно ровно столько же знаков, сколько было сосчитано предметов: чтобы записать сто предметов, нужно сто знаков. В двоичной же системе – только семь («1100100»), а в пятеричной – всего три («400»).

Вот почему «единичную» систему едва ли можно назвать «системой»; по крайней мере ее нельзя поставить рядом с остальными, так как она принципиально от них отличается, не давая никакой экономии в изображении чисел. Если же ее откинуть, то простейшей системой счисления нужно признать систему *двоичную*, в которой употребля-

ются всего две цифры: 1 и 0. При помощи единицы и нуля можно изобразить всё бесконечное множество чисел!

Для ручного счета система эта мало удобна – получаются слишком длинные числа<sup>1</sup>; но теоретически она имеет все права считаться простейшей. Она обладает любопытными особенностями, присущими только ей; особенностями этими можно воспользоваться для выполнения эффектных математических фокусов, о которых мы скоро побеседуем подробно в главе «Фокусы без обмана».

## 22. НЕОБЫЧАЙНАЯ АРИФМЕТИКА

К арифметическим действиям мы привыкли настолько, что выполняем их автоматически, почти не думая о том, что мы делаем. Но те же действия потребуют от нас немалого напряжения, если мы пожелаем применить их к числам, написанным не по десятичной системе.

Попробуем выполнить сложение следующих двух чисел, написанных по пятеричной системе:

$$\begin{array}{r} + \text{«}4203\text{»} \\ \text{«}2132\text{»} \end{array} \quad (\text{в пятеричной системе}).$$

Складываем по разрядам, начиная с единиц, т.е. справа:  $3 + 2$  равно пяти; но мы не можем записать 5, потому что такой цифры в пятеричной системе не существует: пять есть уже единица высшего разряда. Значит, в сумме вовсе нет единиц; пишем 0, а пять, т.е. единицу следующего разряда, удерживаем в уме. Далее,  $0 + 3 = 3$ , да еще едини-

---

<sup>1</sup> Зато, как увидим далее, для такой системы до крайности упрощаются таблицы сложения и умножения. (Эта система ныне широко используется в компьютерах. – *Примеч. ред.*)

ца, удержанная в уме, — всего 4 единицы второго разряда. В третьем разряде получаем  $2 + 1 = 3$ . В четвертом  $4 + 2$  равно шести, т. е.  $5 + 1$ ; пишем 1, а 5, т. е. единицу высшего разряда, относим далее влево. Искомая сумма равна «11 340».

$$\begin{array}{r} + \text{«4203»} \\ \text{«2132»} \\ \hline \text{«11340»} \end{array} \text{ (в пятеричной системе).}$$

Предоставляем читателю проверить это сложение, предварительно переводя изображенные в кавычках числа в десятичную систему.

Точно так же выполняются и другие действия. Для упражнения приводим далее ряд примеров, число которых читатель при желании может увеличить самостоятельно<sup>1</sup>.

#### В пятеричной системе

А	В	С
$\begin{array}{r} \text{«2143»} \\ - \text{«334»} \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} \text{«213»} \\ \times \text{«3»} \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} \text{«42»} \\ \times \text{«31»} \\ \hline \end{array}$

#### В троичной системе

D	E	F и G
$\begin{array}{r} \text{«212»} \\ + \text{«120»} \\ \hline \text{«201»} \end{array}$	$\begin{array}{r} \text{«122»} \\ \times \text{«20»} \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{l} \text{«220» : «2»} \\ \text{«201» : «12»} \end{array}$

При выполнении этих действий мы сначала мысленно изображаем написанные числа в привычной нам десятичной системе, а получив результат, снова изображаем его в требуемой недесятичной системе.

---

<sup>1</sup> Ответы на примеры А – G приведены в конце четвертой главы.

Но можно поступать и иначе: составить «таблицу сложения» и «таблицу умножения» в тех же системах, в которых даны нам числа, и пользоваться ими непосредственно. Например, в *пятеричной* системе.

**Таблица сложения  
в пятеричной  
системе**

0	1	2	3	4
1	2	3	4	10
2	3	4	10	11
3	4	10	11	12
4	10	11	12	13

С помощью этой таблички мы могли бы сложить числа «4203» и «2132», написанные в пятеричной системе, гораздо менее напрягая внимание, чем при способе, примененном раньше.

Упрощается, как легко понять, также выполнение вычитания.

Составим теперь *таблицу умножения*.

**Таблица умножения  
в пятеричной системе  
(таблица Пифагора)**

1	2	3	4
2	4	11	13
3	11	14	22
4	13	22	31

Имея эту табличку перед глазами, вы опять-таки можете облегчить себе труд умножения (и деления) чисел в пятеричной системе, — в чем легко убедиться, применив ее к приведенным выше примерам.

Например, при умножении

по пятеричной  
системе

$$\left\{ \begin{array}{r} \times \text{«}213\text{»} \\ \text{«}3\text{»} \\ \hline \text{«}1144\text{»} \end{array} \right.$$

рассуждаем так. Трижды три «14» (из таблицы); 4 пишем, 1 в уме. Один на 3 дает 3, да еще один, — пишем 4. Дважды три равно «11»; 1 пишем, 1 — переносим влево. Получаем в результате «1144».

Чем меньше основание системы, тем меньше и соответствующие таблицы сложения и умножения. Например, для *троичной* системы обе таблицы таковы.

Таблица  
сложения  
в *троичной*  
системе

0	1	2
1	2	10
2	10	11

Пифагорова  
таблица  
в *троичной*  
системе

1	2
1	11

Их можно было бы сразу запомнить и пользоваться ими для выполнения действий. Самые маленькие таблицы сложения и вычитания получают для *двоичной системы*:

Таблица  
сложения  
в *двоичной*  
системе

0	1
1	10

Таблица умножения  
в *двоичной* системе

$$1 \times 1 = 1$$

При помощи таких-то простых «таблиц» можно выполнять в двоичной системе *все четыре действия*! Умножения в этой системе, в сущности, как бы и вовсе нет: ведь умножить на единицу значит оставить число без изменения; умножение же на «10», «100», «1000» (т.е. на 2, на 4, на 8) сводится к простому приписыванию справа соответствующего числа нулей. Что же касается сложения, то для выполнения его нужно помнить только одно — что в двоичной системе  $1 + 1 = 10$ .



Не правда ли, мы с полным основанием назвали раньше двоичную систему самой простой из всех возможных? Длиннота чисел этой своеобразной арифметики искупается простотой выполнения над ними всех арифметических действий.

Пусть требуется, например, умножить

$$\begin{array}{rcl}
 \text{в двоичной} & & \left\{ \begin{array}{r}
 \text{системе} \quad \times \quad \begin{array}{r} \text{«1001011101»} \\ \text{«110101»} \\ \hline \text{«1001011101»} \end{array} \\
 + \quad \begin{array}{r} \text{«1001011101»} \\ \text{«1001011101»} \\ \text{«1001011101»} \\ \hline \text{«111110101000001»}. \end{array}
 \end{array}
 \right.
 \end{array}$$

Выполнение действия сводится только к переписыванию данных чисел в надлежащем расположении: это требует несравненно меньших умственных усилий, чем умножение тех же чисел в десятичной системе.

Наш пример в десятичной системе счисления может быть переписан так:

$$\begin{array}{r}
 605 \\
 53 \\
 \hline
 1815 \\
 3025 \\
 \hline
 32065
 \end{array}$$

Если бы у нас была принята двоичная система, то изучение *письменного* счисления требовало бы наименьшего напряжения мысли (зато — наибольшего количества бумаги и чернил). Однако в *устном* счете двоичная арифметика по удобству выполнения действий значительно уступает нашей десятичной.

Приведем также образчик действия *деления*, выполненного в двоичной системе счисления:

$$\begin{array}{r}
 10000010 : 111 = 10010 \\
 \underline{111} \\
 1001 \\
 \underline{111} \\
 100
 \end{array}$$

В привычной нам десятичной системе действие это имело бы следующий вид:

$$\begin{array}{r}
 130 : 7 = 18 \\
 \underline{7} \\
 60 \\
 \underline{56} \\
 4
 \end{array}$$

Делимое, делитель, частное и остаток в обоих случаях, по существу, одинаковы, но промежуточные выкладки разные.

## 23. ЧЕТ ИЛИ НЕЧЕТ?

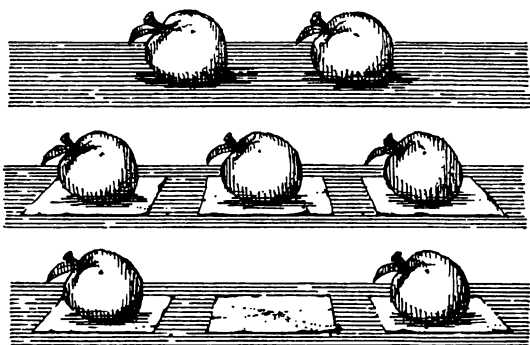
Не видя числа, трудно, конечно, угадать, какое оно – четное или нечетное. Но не думайте, что вы всегда сможете сказать это, едва увидите задаваемое число.

Скажите, например, четное или нечетное число 16?

Если вам известно, что оно написано по десятичной системе, то вы вправе утверждать, что число это – четное. Но когда оно написано по какой-либо другой системе – можно ли быть уверенным, что оно изображает непременно четное число?

Оказывается, нет. Если основание, например, семь, то «16» означает  $7 + 6 = 13$ , число нечетное. То же будет и для всякого нечетного основания (потому что всякое нечетное число  $+ 6$  есть тоже нечетное число).

Отсюда вывод, что знакомый нам признак делимости на два (последняя цифра четная) безусловно



**Рис. 19.** При взгляде на эти яблоки любители двоичной системы увидят (двоичные) числа 11, 111 и 101. В десятичной системе им соответствуют (десятичные) числа 3, 7 и 5.

пригоден только для десятичной системы счисления, для других же – не всегда. А именно, он верен только для систем счисления с четным основанием: шестеричной, восьмеричной и т. п.

Каков же признак делимости на 2 для систем с *нечетным* основанием? Достаточно краткого размышления, чтобы установить его: сумма цифр должна быть четной. Например, число «136» – четное во всякой системе счисления, даже и с нечетным основанием: действительно, в последнем случае имеем:

$$\text{нечетное число}^1 + \text{нечетное число} + \text{четное} = \text{четное число}$$

С такую же осторожностью надо отнестись к задаче: всегда ли число 25 делится на пять?

В семеричной или в восьмеричной системе число, так изображенное, не делится на 5 (потому что

---

<sup>1</sup> Нечетное число, умноженное на себя (т. е. на нечетное), всегда дает нечетное число. Например:  $7 \times 7 = 49$ ;  $11 \times 11 = 121$  и т. п.

оно равно девятнадцати или двадцати одному). Точно так же общеизвестный признак делимости на 9 (по сумме цифр) правилен только для десятичной системы. Напротив, в пятеричной системе тот же признак делимости применим для 4, а, например, в семеричной — для 6. Так, число «323» в пятеричной системе делится на 4, потому что  $3 + 2 + 3 = 8$ , а число «51» в семеричной — на 6 (легко убедиться в этом, переведя числа в десятичную систему: получим соответственно 88 и 36).

Почему это так, читатель сам сможет сообразить, если вникнет хорошенько в вывод признака делимости на 9 и приложит те же рассуждения, соответственно измененные, например, к семеричной системе для вывода признака делимости на 6.

Труднее доказать чисто арифметическим путем справедливость следующих положений:

$$\left. \begin{array}{l} 121 : 11 = 11 \\ 144 : 12 = 12 \\ 21 \times 21 = 441 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{во всех системах} \\ \text{счисления (где имеются} \\ \text{соответствующие цифры).} \end{array}$$

Знакомые с начатками алгебры легко найдут основание, объясняющее свойство этих равенств. Остальные читатели могут испытать их для разных систем счисления.

## 24. ПОУЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

1. Когда  $2 \times 2 = 100$ ?
2. Когда  $2 \times 2 = 11$ ?
3. Когда 10 — число нечетное?
4. Когда  $2 \times 3 = 11$ ?
5. Когда  $3 \times 3 = 14$ ?

**ОТВЕТЫ** на эти вопросы не должны затруднить читателя, познакоившегося с настоящей главой «Занимательной арифметики».

1.  $2 \times 2 = 100$ , когда 100 написано по двоичной системе.
2.  $2 \times 2 = 11$ , когда 11 написано по троичной системе.
3. 10 – число нечетное, когда оно написано по пятеричной системе, а также по системе с основанием 3, 7 и 9.
4.  $2 \times 3 = 11$ , когда 11 написано по пятеричной системе.
5.  $3 \times 3 = 14$ , когда 14 написано по пятеричной системе.

## 25. ДРОБИ БЕЗ ЗНАМЕНАТЕЛЯ

Мы привыкли к тому, что без знаменателя пишутся лишь дроби *десятичные*. Поэтому с первого взгляда кажется, что написать прямо без знаменателя дробь  $\frac{2}{7}$  или  $\frac{1}{3}$  нельзя. Дело представится нам, однако, иначе, если вспомним, что дроби без знаменателя возможны и в *других системах* счисления.

Что, например, означает дробь «0,4» в *пятеричной* системе? Конечно,  $\frac{4}{5}$ .

Дробь «1,2» в *семеричной* системе означает  $1\frac{2}{7}$ .

А что означает в той же семеричной системе дробь «0,33»? Здесь результат сложнее:

$$\frac{3}{7} + \frac{3}{49} = \frac{24}{49}.$$

Рассмотрим еще несколько *недесятичных* дробей без знаменателя. Чему равны

1. «2,121» в троичной системе?
2. «1,011» в двоичной системе?
3. «3,431» в пятеричной системе?
4. «2,(5)» в семеричной системе?

## ОТВЕТЫ

1.  $2 + \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{1}{27} = 2\frac{16}{27}$
2.  $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 1\frac{3}{8}$
3.  $3 + \frac{4}{5} + \frac{3}{25} + \frac{1}{125} = 3\frac{116}{125}$
4.  $2 + \frac{5}{7} + \frac{5}{49} + \frac{5}{343} + \dots = 2\frac{5}{6}$

В правильности последнего равенства читатель может убедиться, если попробует применить к данному случаю, с соответствующим видоизменением, рассуждения, относящиеся к превращению десятичных периодических дробей в простые.

В заключение рассмотрим несколько примеров особого рода<sup>1</sup>.

5. По какой системе счисления выполнено следующее сложение?

$$\begin{array}{r} 756 \\ 307 \\ + 2456 \\ \hline 24 \\ \hline 3767 \end{array}$$

6. По какой системе счисления выполнено деление?

$$\begin{array}{r} 4\ 415\ 400 : 4\ 532 = 543 \\ \underline{4\ 034\ 4} \\ 341\ 00 \\ \underline{314\ 12} \\ 22\ 440 \\ \underline{22\ 440} \\ 0 \end{array}$$

7. Напишите число «130» во всех системах счисления – от *двоичной* до *девятеричной* включительно.

8. Чему равно число «123», если считать его написанным во *всех* системах счисления до *девятеричной* включительно?

Возможно ли, что оно написано по *двоичной* системе?

А по *троичной*?

Если оно написано по *пятеричной* системе, делится ли оно без остатка на шесть?

Если написано по *девятеричной* системе, то делится ли оно без остатка на четыре?

---

<sup>1</sup> Ответы на примеры 5 – 8 приведены в конце четвертой главы.

## ОТВЕТЫ К ЗАДАЧЕ 20

5.1146.

6. НН, где через Н обозначена цифра «13».

## ОТВЕТЫ К ЗАДАЧЕ 22

A. «1304».

B. «1144».

C. «2402».

D. «2010».

E. «10 210».

F. «110».

G. «10», остаток «11».

## ОТВЕТЫ К ЗАДАЧЕ 25

5. По восьмеричной.

6. По шестеричной.

7. Число «130» в различных системах счисления выражается следующим образом:

в двоичной ..... 10 000 010

в троичной ..... 11 211

в четверичной ..... 2 002

в пятеричной ..... 1 010

в шестеричной ..... 334

в семеричной ..... 244

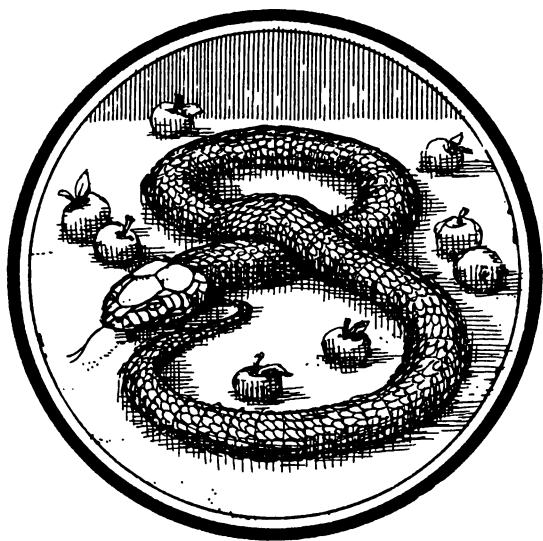
в восьмеричной ..... 202

в девятеричной ..... 154

8. По четверичной системе число «123» равно 27; по пятеричной – 38; по шестеричной – 51; по семеричной – 66; по восьмеричной – 83; по девятеричной – 102.

Число это не может быть написано ни по двоичной, ни по троичной системам, так как содержит цифру 3, которой в этих системах нет.

Число это по пятеричной системе делится на 2, так как сумма его цифр делится на 2; по семеричной системе оно делится на 6, а по девятеричной – не делится на 4.

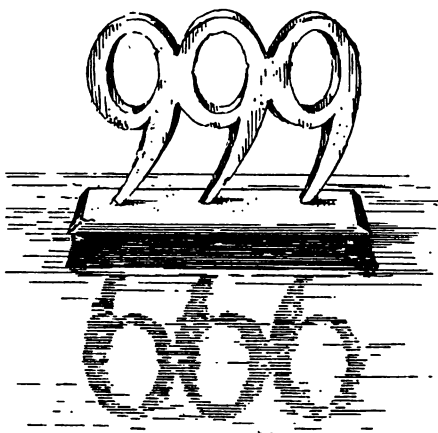


*Глава пятая*

Галерея  
числовых диковинок







## 26. АРИФМЕТИЧЕСКАЯ КУНСТКАМЕРА

В мире чисел, как и в мире живых существ, встречаются подлинные диковинки, редкие экземпляры, обладающие исключительными свойствами. Из таких необыкновенных чисел можно было бы составить своего рода музей числовых редкостей, настоящую «арифметическую кунсткамеру». В ее витринах нашли бы себе место не только числовые исполины, о которых мы побеседуем еще в особой главе, но и числа скромных размеров, зато выделяющиеся из ряда других каких-либо необычайными свойствами. Некоторые из них уже по внешности привлекают внимание; другие открывают свои диковинные особенности лишь при более близком знакомстве.

Представленные в нашей «галерее» любопытные особенности некоторых чисел не имеют ничего общего с теми воображаемыми диковинками, которые усматривают в иных числах любители таинственного. Образчиком подобных числовых суеве-

рий может служить следующее арифметическое соображение, неосторожно высказанное знаменитым французским писателем Виктором Гюго:

«Три – число совершенное. Единица для числа 3 – то же, что диаметр для круга. Среди прочих чисел 3 – то же, что круг среди фигур. Число 3 – единственное, имеющее центр. Остальные числа – эллипсы, имеющие два фокуса. Отсюда следующая особенность, присущая единственному числу 3: сложите цифры любого числа, кратного 3, – сумма всегда делится без остатка на 3».

В этом туманном и мнимо-глубокомысленном откровении все неверно: что ни фраза, то либо вздор, либо вовсе бессмыслица. Верно только замечание о свойстве суммы цифр, но свойство это не вытекает из сказанного и к тому же не представляет исключительной особенности числа 3: им отличается в десятичной системе также и число 9, а во всех вообще системах – числа, на единицу меньшие основания.

Диковинки нашей галереи – иного рода: в них нет ничего таинственного или неразгаданного.

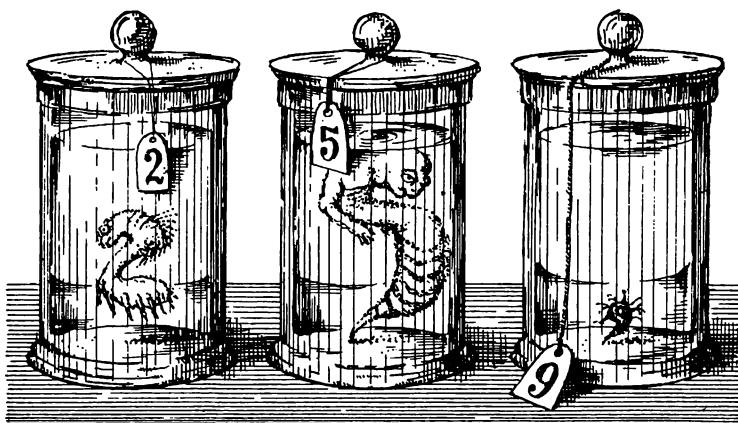


Рис. 20. Чем замечательны эти числа?

Приглашаю читателя совершить экскурсию по галерее таких числовых диковинок и познакомиться с некоторыми из них.

Пройдем, не останавливаясь, мимо первых витрин, заключающих числа, свойства которых нам хорошо знакомы. Мы знаем уже, почему попало в галерею диковинок число 2: не потому, что оно первое четное число<sup>1</sup> (и притом единственное простое четное число, а потому что оно – основание самой любопытной системы счисления (см. задачу 22).

Не удивимся мы, встретив тут 5 – одно из наших любимейших чисел, играющее важную роль при всяких «округлениях» (см. задачу 10), в том числе и при округлении цен. Не будет неожиданностью для нас найти здесь и число 9, – конечно, не как «символ постоянства»<sup>2</sup>, а как число, облегчающее нам проверку всех арифметических действий (см. задачу 16, ч. II). Но вот витрина, за стеклом которой мы видим: «Число 12».

## 27. ЧИСЛО 12

Чем оно замечательно? Это число месяцев в году и число единиц в дюжине. Но что, в сущности, особенного в дюжине?

Немногим известно, что 12 – старинный и едва не победивший соперник числа 10 в борьбе за почетный пост основания общеупотребительной системы счисления. Культурнейший народ Древнего Востока – вавилоняне и их предшественники, еще

---

<sup>1</sup> Первым четным числом можно, впрочем, считать не 2, а 0.

<sup>2</sup> Древние (последователи Пифагора) считали 9 символом постоянства, «так как все числа, кратные 9, имеют сумму цифр, кратную 9».

более древние жители Двуречья – шумеры, вели счет в двенадцатеричной системе счисления. Кое в чем мы и до сих пор платим дань этой системе, не смотря на победу десятичной. Наше пристрастие к дюжинам и гроссам<sup>1</sup>, наше деление суток на две дюжины часов, деление часа на 5 дюжин минут, деление минуты на столько же секунд, деление круга на 30 дюжин градусов, наконец, деление фута на 12 дюймов – не свидетельствует разве все это (и многое другое) о том, как велико в наши дни влияние древней системы?

Хорошо ли, что в борьбе между дюжиной и десяткой победила последняя?

Конечно, сильными союзницами десятки были и остаются наши собственные руки с *десятью* пальцами – живые счетные машины. Но если бы не это, то следовало бы, безусловно, отдать предпочтение 12 перед 10. Гораздо удобнее производить расчеты по двенадцатеричной системе, нежели по десятичной. Причина та, что число 10 делится без остатка на 2 и на 5, между тем как 12 делится и на 2, и на 3, и на 4, и на 6. У числа 10 всего два делителя, у числа 12 – четыре.

Преимущества двенадцатеричной системы станут вам яснее, если вы примете в соображение, что в двенадцатеричной системе число, оканчивающееся нулем, кратно и 2, и 3, и 4, и 6: подумайте, как удобно делить число, когда и  $\frac{1}{2}$ , и  $\frac{1}{3}$ , и  $\frac{1}{4}$ , и  $\frac{1}{6}$  его должны быть целыми числами!

Если же выраженное в двенадцатеричной системе число оканчивается двумя нолями, то оно должно делиться без остатка на 144, а следовательно

---

<sup>1</sup> Гросс – 12 дюжин. В коробке перьев – гросс, 144 штуки. (Кстати, как раньше перьев, так теперь карандашей и фломастеров в коробке обычно бывает по 6, 12, 24 и т. д. – *Примеч. ред.*)



**Рис. 21.** Почему древние вавилоняне предпочитали двенадцатеричную систему?

но, и на все множители 144, т. е. на следующий ряд чисел:

2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 36, 48, 72, 144.

Четырнадцать делителей вместо тех восьми, которые имеют числа, написанные в десятичной системе, если оканчиваются двумя нолями (2, 4, 5, 10, 20, 25, 50 и 100). В нашей системе только дроби вида  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{5}$ ,  $\frac{1}{20}$  превращаются в конечные десятичные, в двенадцатеричной же системе можно написать без знаменателя гораздо более разнообразные дроби и прежде всего:  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{6}$ ,  $\frac{1}{8}$ ,  $\frac{1}{9}$ ,  $\frac{1}{12}$ ,

$\frac{1}{16}, \frac{1}{18}, \frac{1}{24}, \frac{1}{36}, \frac{1}{48}, \frac{1}{72}, \frac{1}{144}$ , которые соответственно изобразятся так:

0,6; 0,4; 0,3; 0,2; 0,16; 0,14; 0,1; 0,09;  
0,08, 0,06; 0,04; 0,03; 0,02; 0,01.

Было бы, впрочем, большим заблуждением думать, что делимость числа может зависеть от того, в какой системе счисления оно изображено. Если орехи, заключающиеся в данном мешке, могут быть разложены в 5 одинаковых куч, то это свойство их, конечно, не изменится от того, будет ли наше число орехов выражено в той или иной системе счисления, или отложено на счетах, или написано прописью, или, наконец, изображено каким-либо иным способом.

Если число, написанное в двенадцатеричной системе, делится на 6 или на 72, то, будучи выражено в другой системе счисления, например, в десятичной, оно должно иметь те же делители. Разница лишь в том, что в двенадцатеричной системе делимость на 6 или на 72 *легче обнаружить* (число оканчивается одним или двумя нолями). Когда говорят о преимуществах двенадцатеричной системы в смысле делимости на большее число делителей, то имеют в виду, что благодаря склонности нашей к «круглым» числам на практике будут чаще встречаться числа, оканчивающиеся в двенадцатеричной системе нолями.

При таких преимуществах двенадцатеричной системы неудивительно, что среди математиков раздавались голоса за полный переход на эту систему. Однако мы уже чересчур тесно сжились с десятичной системой, чтобы решиться на такую реформу.

Великий французский математик Лаплас так высказался по этому вопросу сто лет назад: «Основание нашей системы нумерации не делится на 3

и 4, т. е. на два делителя, весьма употребительные по их простоте. Присоединение двух новых знаков (цифр) дало бы системе счисления это преимущество; но такое нововведение было бы, несомненно, отвергнуто. Мы потеряли бы выгоду, породившую нашу арифметику, — именно, возможность счета по пальцам рук».

Напротив, следовало бы ради единообразия перейти также в измерении дуг от употребительных градусов и минут к новым, десятичным.

Такую реформу пытались провести во Франции, но она не привилась. Не кто иной, как сейчас упомянутый Лаплас, был горячим сторонником этой реформы. Его знаменитая книга «Изложение системы мира» последовательно проводит десятичное подразделение углов; градусом он называет не 90-ю, а 100-ю долю прямого угла, минутой — 100-ю часть градуса и т. д. Лаплас высказывался даже за десятичное подразделение часов и минут. «Единообразие системы мер требует, чтобы день был разделен на 100 часов, час — на 100 минут и минута — на 100 секунд», — писал он.

Вы видите, следовательно, что дюжина имеет за собою длинную историю и что число 12 не без основания очутилось в галерее числовых диковинок. Зато его соседка «чертова дюжина» — 13 фигурирует здесь не потому, что чем-либо замечательна, а скорее именно потому, что ничем не замечательна, хотя и пользуется такой мрачной славой.

Разве не удивительно в самом деле, что ровно ничем не выделяющееся число могло стать столь «страшным» для суеверных людей?

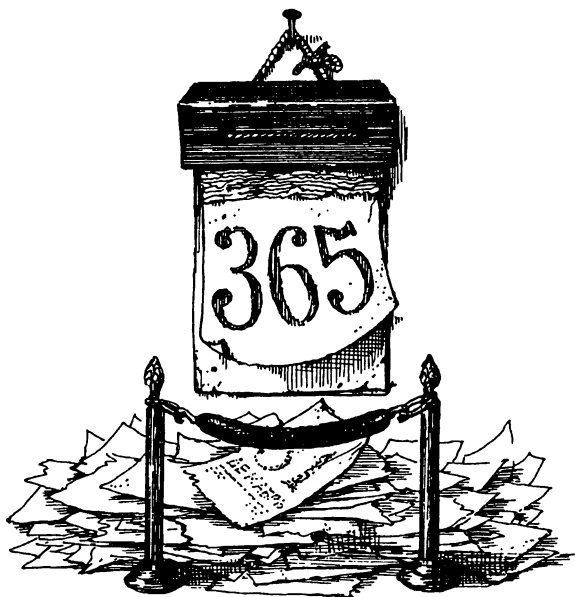
Как сильно было распространено это суеверие (зародившееся в древнем Вавилоне), видно из того, что в эпоху царского правительства при устройстве электрического трамвая в Петербурге





**Рис. 22.** «Клуб числа 13».

долго не решались вводить маршрут № 13 и пропустили его, перейдя сразу к № 14: власти думали, что публика не станет ездить в вагонах с таким «роковым» номером. Любопытно и то, что в Петербурге насчитывалось немало домов, где 13-й номер квартиры был пропущен... В гостиницах также нередко отсутствовала комната № 13, заменяемая № 12а. Для борьбы с этим ничем не обоснованным числовым суеверием кое-где на Западе (например, в Англии) учреждались даже особые «клубы числа 13»...



**Рис. 23.** Известны ли вам особенности этого числа?

В следующей витрине арифметической кунсткамеры перед нами число 365.

## 28. ЧИСЛО 365

Оно замечательно прежде всего тем, что определяет число дней в году. Далее, при делении на 7 оно дает в остатке 1; эта несущественная, казалось бы, особенность числа 365 имеет большое значение для нашего семидневного календаря.

Другая особенность числа 365 не связана с календарем:

$$365 = 10 \times 10 + 11 \times 11 + 12 \times 12,$$

т. е. 365 равно сумме квадратов трех последовательных чисел, начиная с 10:

$$10^2 + 11^2 + 12^2 = 100 + 121 + 144 = 365.$$

Но и это еще не все, — тому же равна сумма квадратов двух следующих чисел, 13 и 14:

$$13^2 + 14^2 = 169 + 196 = 365.$$

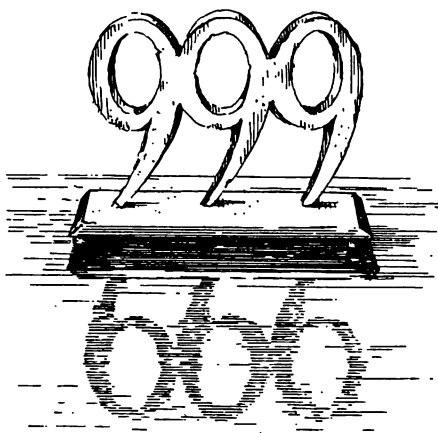
На указанном свойстве числа 365 основана задача С. А. Рачинского, изображенная на известной картине «Трудная задача» Богданова-Бельского:

$$\frac{10^2 + 11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2}{365} = ?$$

Таких чисел не много наберется в нашей галерее арифметических диковинок.

## 29. ТРИ ДЕВЯТКИ

В следующей витрине (рис. 24) выставлено наибольшее из всех трехзначных чисел: 999. Оно, без сомнения, гораздо удивительнее, чем его перевернутое изображение — 666 — знаменитое «звериное число» Апокалипсиса, вселявшее нелепый страх



**Рис. 24.** Число, на которое легко умножать.

во многих суеверных людей, но по арифметическим свойствам ничем не выделяющееся среди прочих чисел.

Любопытная особенность числа 999 проявляется при умножении на него всякого другого трехзначного числа. Тогда получается шестизначное произведение: первые три цифры его есть умножаемое число, только уменьшенное на единицу, а остальные три цифры (кроме последней) — «дополнения» первых до 9. Например:

$$573 \times 999 = \begin{array}{r} 572 \\ 572 \ 427 \\ \hline 999 \end{array} .$$

Стоит лишь взглянуть на следующую строку, чтобы понять происхождение этой особенности:

$$573 \times 999 = 573 \times (1000 - 1) = \left\{ \begin{array}{r} 573 \ 000 \\ - \quad 573 \\ \hline 572 \ 427. \end{array} \right.$$

Зная эту особенность, мы можем «мгновенно» умножать любое трехзначное число на 999.

$$947 \times 999 = 946 \ 053;$$

$$509 \times 999 = 508 \ 491;$$

$$981 \times 999 = 980 \ 019;$$

и т. п.

А так как

$$999 = 9 \times 111 = 3 \times 3 \times 3 \times 37,$$

то вы можете, опять-таки с молниеносной быстротой, писать целые столбцы шестизначных чисел, кратных 37; не знакомый со свойствами числа 999, конечно, сделать этого не в состоянии. Короче говоря, вы можете устраивать перед непосвященными маленькие сеансы «мгновенного умножения и деления».

## 30. ЧИСЛО ШЕХЕРЕЗАДЫ

Следующее на очереди у нас число 1001 – прославленное число Шехерезады (рис. 25). Вы, вероятно, и не подозревали, что в самом названии сборника волшебных арабских сказок заключается также своего рода «чудо», которое могло бы поразить воображение сказочного султана не менее многих других чудес Востока, если бы он способен был интересоваться арифметическими диковинками.

Чем же замечательно число 1001? С виду оно кажется весьма обыкновенным. Оно даже не принадлежит к избранному разряду так называемых «простых» чисел. Оно делится без остатка и на 7, и на 11, и на 13 – на три последовательных простых числа, произведением которых оно и является. Но не в том диковинка, что  $1001 = 7 \times 11 \times 13$ , – здесь нет еще ничего волшебного. Замечательнее то, что при умножении на него трехзначного числа получается результат, состоящий из самого умноженного числа, только написанного дважды. Например:



Рис. 25. Число Шехерезады.

$$873 \times 1001 = 873\,873,$$

$$207 \times 1001 = 207\,207, \text{ и т. д.}$$

И хотя этого и следовало ожидать, так как

$$873 \times 1001 = 873 \times 1000 + 873 = 873\,000 + 873,$$

все же, пользуясь указанным свойством числа Ше-херазады, можно достичь результатов совсем неожиданных, кажущихся волшебными, по крайней мере человеку неподготовленному. Сейчас поясним, в чем дело.

### *Фокус*

Кружок товарищей, не посвященных в арифметические тайны, вы можете поразить следующим фокусом.

Пусть кто-нибудь напишет на бумажке – в тайне от вас – трехзначное число, какое хочет, и затем пусть припишет к нему еще раз то же самое число. Получится шестизначное число, состоящее из трех повторяющихся цифр.

Предложите тому же товарищу или его соседу разделить – в тайне от вас – это число на 7; при этом вы заранее предсказываете, что остатка не получится. Результат передается новому соседу, который, по вашему предложению, делит его на 11; и хотя вы не знаете делимого, вы все же смело утверждаете, что и оно разделится без остатка.

Полученный результат вы направляете следующему соседу, которого просите разделить это число на 13, – деление снова выполняется без остатка, о чем вы заранее предупреждаете.

Результат третьего деления вы, не глядя на полученное число, вручаете первому товарищу со словами:

– Вот число, которое вы задумали!

Так и есть: вы угадали.

Какова разгадка фокуса?

### *Разгадка фокуса*

Этот красивый арифметический фокус, производящий на непосвященных впечатление волшебства, объясняется очень просто: вспомните, что приписать к трехзначному числу его само — значит, умножить его на 1001, т. е. на произведение  $7 \times 11 \times 13$ . Шестизначное число, которое ваш товарищ получит после того, как припишет к задуманному числу его само, должно будет поэтому делиться без остатка и на 7, и на 11, и на 13. А в результате деления последовательно на эти три числа (т. е. на их произведение — 1001) оно должно, конечно, снова дать задуманное число.

Выполнение фокуса можно при желании видоизменить так, чтобы иметь возможность объявить загадчику число, которое получается у него в итоге выкладок. Вы знаете, что шестизначное число, над которым начинают проделывать вычисления, равно произведению:

$$(\text{задуманное число}) \times 7 \times 11 \times 13.$$

Поэтому, если вы попросите разделить шестизначное число сначала на 7, потом на 11, потом на задуманное, то с уверенностью можете объявить конечный итог всех делений: 13.

Повторяя фокус, вы попросите производить деление в ином порядке: сначала на 11, потом на задуманное число и на 13. Последнее деление должно дать в частном 7. Или сначала на 13, потом на задуманное число и на 7; конечный итог — 11.

## **31. ЧИСЛО 10 101**

После сказанного о числе 1001 уже не будет неожиданностью увидеть в витринах нашей галереи число 10 101 (рис. 26). Вы догадываетесь, какому именно свойству обязано это число такую честью?

Оно, как и число 1001, дает удивительный результат при умножении, но не трехзначных чисел, а *двузначных*. Каждое двузначное число, умноженное на 10 101, дает в результате само себя, написанное *трижды*. Например:

$$73 \times 10\,101 = 737\,373;$$

$$21 \times 10\,101 = 212\,121.$$

Причина уясняется из следующей строки:

$$73 \times 10\,101 = (73 (10\,000 + 100 + 1)) = \left\{ \begin{array}{r} 730\,000 \\ + 7300 \\ \hline 73 \\ \hline 737\,373 \end{array} \right.$$

Можно ли проделывать с помощью этого числа фокусы необычайного отгадывания, как с помощью числа 1001?

Да, можно. Здесь возможно даже обставить фокус разнообразнее, если иметь в виду, что 10 101 есть произведение четырех простых чисел:

$$10\,101 = 3 \times 7 \times 13 \times 37.$$



Рис. 26. Число, пригодное для фокусов.



## Фокус

Предложив товарищу задумать какое-нибудь *двузначное* число, вы предлагаете второму приписать к нему то же число, а третьему – приписать то же число еще раз. Четвертого вы просите разделить получившееся *шестизначное* число, например, на 7; пятый товарищ должен разделить полученное частное на 3; шестой делит то, что получилось, на 37; и наконец, седьмой делит этот результат на 13, причем все 4 деления выполняются без остатка. Результат последнего деления вы просите передать первому товарищу: это и есть задуманное им число.

При повторении фокуса вы можете внести в него некоторое разнообразие, обращаясь каждый раз к новым делителям. А именно, вместо четырех множителей

$$3 \times 7 \times 13 \times 37$$

можете взять следующие группы трех множителей:

$$21 \times 13 \times 37; 7 \times 39 \times 37;$$

$$3 \times 91 \times 37; 7 \times 13 \times 111.$$

Этот фокус тоже легко видоизменить подобно тому, как было объяснено в предыдущем случае (в фокусе с числом 1001).

Число 10 101, пожалуй, даже удивительнее волшебного числа Шехеразады, хотя и менее его известно своими поразительными свойствами. О нем писалось, впрочем, еще двести лет тому назад в «Арифметике» Магницкого, в главе, где приводятся примеры умножения «с неким удивлением». С тем большим основанием должны мы включить его в наше собрание арифметических диковинок.

## 32. ЧИСЛО 10 001

С этим числом вы также можете проделать фокусы вроде предыдущих, хотя, пожалуй, и не столь эффектные. Дело в том, что оно представляет собою произведение только двух простых чисел:

$$10\,001 = 73 \times 137.$$

Как можно воспользоваться этим для выполнения арифметических действий «с удивлением», читатель, надеюсь, после всего сказанного выше догадается сам.

## 33. ШЕСТЬ ЕДИНИЦ

В следующей витрине (рис. 27) мы видим новую диковинку арифметической кунсткамеры – число, состоящее из шести единиц. Благодаря знакомству с волшебными свойствами числа 1001 мы сразу соображаем, что

$$111\,111 = 111 \times 1001.$$

Но  $111 = 3 \times 37$ , а  $1001 = 7 \times 11 \times 13$ . Отсюда следует, что наш новый числовой феномен, состоящий из одних лишь единиц, представляет собой произведение пяти простых множителей. Соединяя же эти 5 множителей в две группы на всевозможные лады, мы получаем 15 пар множителей, дающих в произведении одно и то же число, 111 111:

$$\begin{aligned} 3 \times (7 \times 11 \times 13 \times 37) &= 3 \times 37\,037 = 111\,111, \\ 7 \times (3 \times 11 \times 13 \times 37) &= 7 \times 15\,873 = 111\,111, \\ 11 \times (3 \times 7 \times 13 \times 37) &= 11 \times 10\,101 = 111\,111, \\ 13 \times (3 \times 7 \times 11 \times 37) &= 13 \times 8\,547 = 111\,111, \\ 37 \times (3 \times 7 \times 11 \times 13) &= 37 \times 3\,003 = 111\,111, \\ (3 \times 7) \times (11 \times 13 \times 37) &= 21 \times 5\,291 = 111\,111, \\ (3 \times 11) \times (7 \times 13 \times 37) &= 33 \times 3\,367 = 111\,111, \end{aligned}$$

и т. д.



Рис. 27. Числа, пригодные для фокусов и для отгадываний.

Вы можете, значит, засадить кружок из 15 товарищей за работу умножения, и, хотя каждый будет перемножать другую пару чисел, все получат один и тот же оригинальный результат: 111 111.

### Фокус

То же число 111 111 пригодно и для отгадывания задуманных чисел подобно тому, как выполняется это с помощью чисел 1001 и 10 101. В данном случае нужно предлагать задумать число *однозначное*, т.е. одну цифру, и повторить ее 6 раз. Делителями здесь могут служить пять простых чисел: 3, 7, 11, 13, 37 и получающиеся из них составные: 21, 33, 39 и т. д. Это дает возможность до крайности разнообразить выполнение фокуса.

На примере числа 111 111 читатель видит, как можно использовать для арифметических фокусов число, состоящее из одних лишь единиц, если оно разлагается на множители. К счастью для любите-

лей подобных фокусов, многие числа такого начертания составные, а не простые.

Из первых семнадцати чисел этого рода только два наименьшие, 1 и 11, – простые, остальные – составные. Вот как разлагаются на простые множители первые десять из составных чисел этого начертания:

$$\begin{aligned}111 &= 3 \times 37, \\1\ 111 &= 11 \times 101, \\11\ 111 &= 41 \times 271, \\111\ 111 &= 3 \times 7 \times 11 \times 13 \times 37, \\1\ 111\ 111 &= 239 \times 4649, \\11\ 111\ 111 &= 11 \times 73 \times 101 \times 137, \\111\ 111\ 111 &= 9 \times 37 \times 333\ 667, \\1\ 111\ 111\ 111 &= 11 \times 41 \times 271 \times 9091, \\11\ 111\ 111\ 111 &= 21\ 649 \times 513\ 239, \\111\ 111\ 111\ 111 &= 3 \times 7 \times 11 \times 13 \times 37 \times 101 \times 9901.\end{aligned}$$

Не все приведенные здесь числа удобно использовать для отгадывания; в некоторых случаях выполнение фокуса возложило бы на загадчика чересчур обременительную работу. Но числа из трех, из четырех, из пяти, из шести, из восьми, из девяти, из двенадцати единиц более или менее пригодны для этой цели.

Образчики использования их для отгадывания будут даны в конце следующей главы.

## 34. ЧИСЛОВЫЕ ПИРАМИДЫ

В следующих витринах галереи нас поражают числовые достопримечательности совсем особого рода – некоторое подобие пирамид, составленных из чисел. Рассмотрим поближе первую из них (рис. 28).

## Пирамида 1

Как объяснить эти своеобразные результаты умножения?

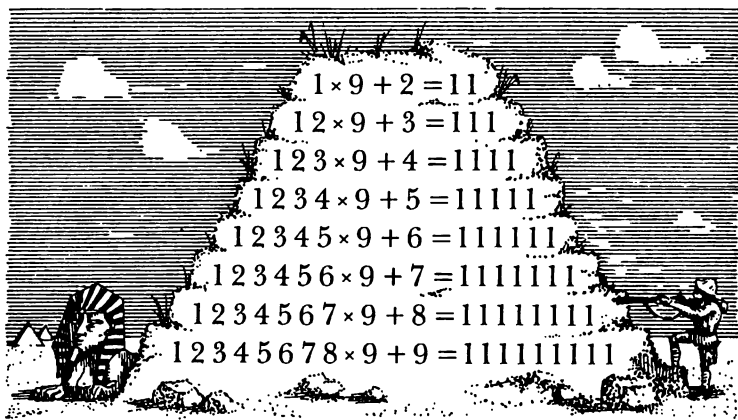


Рис. 28. Первая числовая пирамида.

Чтобы постичь эту странную закономерность, возьмем для примера какой-нибудь из средних рядов нашей числовой пирамиды:

$$123\ 456 \times 9 + 7$$

Вместо умножения на 9 можно умножить на  $(10 - 1)$ , т. е. приписать 0 и вычесть множимое:

$$123\ 456 \times 9 + 7 = 1\ 234\ 560 + 7 - 123456 = \begin{cases} 1\ 234\ 567 \\ - \quad 123\ 456 \\ \hline 1\ 111\ 111 \end{cases}$$

Достаточно взглянуть на последнее вычитание, чтобы понять, почему тут получается результат, состоящий только из одних единиц.

Мы можем уяснить себе это исходя и из других рассуждений. Чтобы число вида 12 345 ... превратилось в число вида 11 111 ..., нужно из второй его цифры вычесть 1, из третьей — 2, из четвертой — 3,

из пятой – 4 и т. д. Иначе говоря, вычесть из него то же число вида 12 345 ..., укороченное на свою последнюю цифру, т. е. вдесятеро уменьшенное и предварительно лишенное последней цифры.

Теперь понятно, что для получения искомого результата нужно наше число умножить на 10, прибавить к нему следующую за последней цифру и вычесть из результата первоначальное число (а умножить на 10 и отнять множимое – значит, умножить на 9).

## Пирамида 2

Сходным образом объясняется образование и следующей числовой пирамиды (рис. 29), получающейся при умножении определенного ряда цифр на 8 и прибавлении последовательно возрастающих цифр.

Особенно интересна в пирамиде последняя строка, где в результате умножения на 8 и прибавления 9

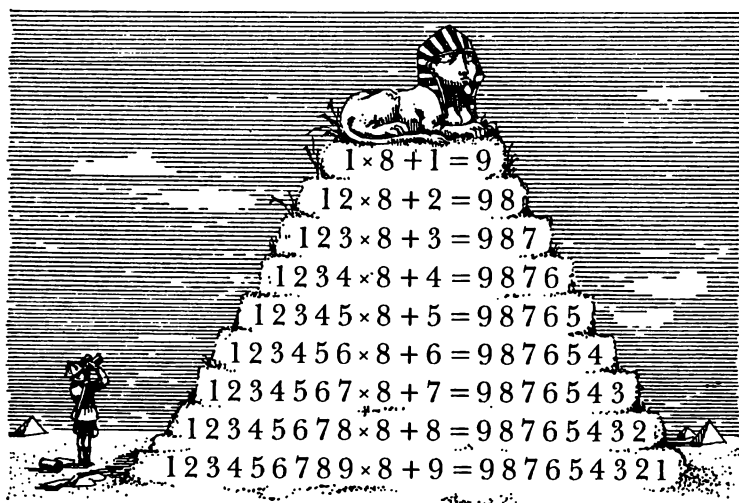


Рис. 29. Вторая числовая пирамида.

происходит превращение полного натурального ряда цифр в такой же ряд, но с обратным расположением.

Попытайтесь объяснить эту особенность.

Получение странных результатов уясняется из следующей строки:

$$12\ 345 \times 8 + 5 = \left\{ - \frac{12\ 345 \times 9 + 6}{12\ 345 \times 1 + 1} \right\} = \left\{ - \frac{111\ 111^1}{12\ 346}, \right.$$

т. е.  $12\ 345 \times 8 + 5 = 111\ 111 - 12\ 346$ . Но, вычитая из числа 111 111 число 12 346, составленное из ряда возрастающих цифр, мы, как легко понять, должны получить ряд убывающих цифр: 98 765.

### *Пирамида 3*

Вот, наконец, третья числовая пирамида, также требующая объяснения (рис. 30). Эта пирамида яв-

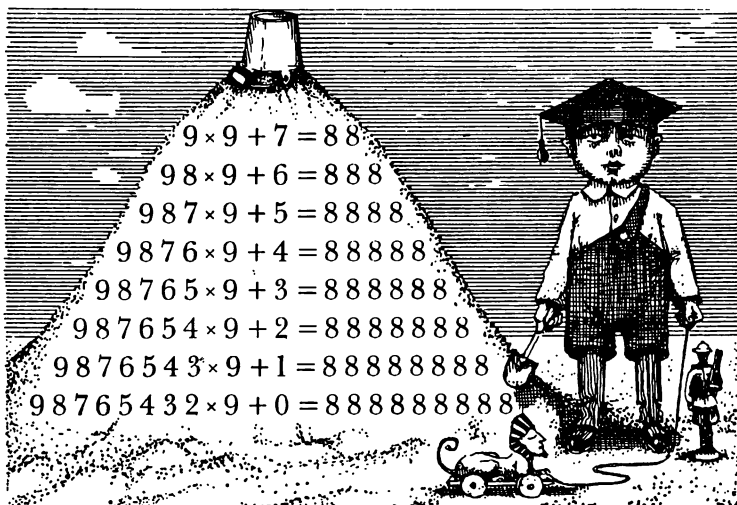


Рис. 30. Третья числовая пирамида.

<sup>1</sup> Почему  $12\ 345 \times 9 + 6$  дает именно 111 111, было показано при рассмотрении предыдущей числовой пирамиды.

ляется прямым следствием первых двух. Связь устанавливается очень легко. Из первой пирамиды мы знаем уже, что, например:

$$12\ 345 \times 9 + 6 = 111\ 111$$

Умножив обе части на 8, имеем:

$$(12\ 345 \times 8 \times 9) + (6 \times 8) = 888\ 888.$$

Но из второй пирамиды известно, что

$$12\ 345 \times 8 + 5 = 98\ 765,$$

$$\text{или } 12\ 345 \times 8 = 98\ 760.$$

Значит:

$$\begin{aligned} 888\ 888 &= (12\ 345 \times 8 \times 9) + (6 \times 8) = \\ (98\ 760 \times 9) + 48 &= (98\ 760 \times 9) + (5 \times 9) + 3 = \\ (98\ 760 + 5) \times 9 + 3 &= 98\ 765 \times 9 + 3. \end{aligned}$$

Вы убеждаетесь, что все эти числовые пирамиды не так уж загадочны, как кажутся с первого взгляда. Но многие наивные люди считают их все же неразгаданными. Мне случилось как-то видеть их напечатанными в одной немецкой газете с припиской: «Причина такой поразительной закономерности никем еще до сих пор не была объяснена»...

## 35. ДЕВЯТЬ ОДИНАКОВЫХ ЦИФР

Конечная строка первой из рассмотренных пирамид (см. рис. 28):

$$12\ 345\ 678 \times 9 + 9 = 111\ 111\ 111$$

представляет образчик целой группы интересных арифметических курьезов, собранной в нашем «музее» в таблицу:



$$\begin{aligned}
12345679 \times 9 &= 111111111 \\
12345679 \times 18 &= 222222222 \\
12345679 \times 27 &= 333333333 \\
12345679 \times 36 &= 444444444 \\
12345679 \times 45 &= 555555555 \\
12345679 \times 54 &= 666666666 \\
12345679 \times 63 &= 777777777 \\
12345679 \times 72 &= 888888888 \\
12345679 \times 81 &= 999999999.
\end{aligned}$$

Откуда такая закономерность в результатах?  
Примем во внимание, что

$$12\ 345\ 678 \times 9 + 9 = (12\ 345\ 678 + 1) \times 9 = 12\ 345\ 679 \times 9.$$

Поэтому

$$12\ 345\ 679 \times 9 = 111\ 111\ 111.$$

А отсюда прямо следует, что

$$\begin{aligned}
12\ 345\ 679 \times 9 \times 2 &= 222\ 222\ 222, \\
12\ 345\ 679 \times 9 \times 3 &= 333\ 333\ 333, \\
12\ 345\ 679 \times 9 \times 4 &= 444\ 444\ 444.
\end{aligned}$$

## 36. ЦИФРОВАЯ ЛЕСТНИЦА

Любопытно, что получится, если число 111 111 111, с которым мы сейчас имели дело, умножить само на себя?

Заранее можно подозревать, что результат должен быть диковинный, — но какой именно?

Если вы обладаете способностью четко рисовать в воображении ряды цифр, вам удастся найти интересный нас результат, даже не прибегая к выкладкам на бумаге. В сущности, здесь дело сводится только к надлежащему расположению частных

произведений, потому что умножать приходится все время лишь единицу на единицу – действие, могущее затруднить разве лишь фонвизинского Митрофанушку, размышлявшего о результате умножения «единожды един». Сложение же частных произведений сводится к простому счету единиц<sup>1</sup>. Вот результат этого единственного в своем роде умножения (при выполнении которого не приходится ни разу прибегать к действию умножения):

$$\begin{array}{r}
 11111111 \\
 11111111 \\
 \hline
 11111111 \\
 11111111 \\
 11111111 \\
 11111111 \\
 11111111 \\
 11111111 \\
 11111111 \\
 11111111 \\
 11111111 \\
 \hline
 12345678987654321
 \end{array}$$

Цифры результата симметрично убывают от середины в обе стороны.

Те из читателей, которых утомило обозрение числовых диковинок, могут покинуть здесь галерею и перейти в следующие отделения, где показываются фокусы и выставлены числовые великаны и карлики; я хочу сказать, что они могут прекратить чтение этой главы и обратиться к дальнейшим. Но кто желает познакомиться еще с несколькими интересными достопримечательностями ми-

---

<sup>1</sup> В двоичной системе счисления, как мы уже объяснили (см. задачу 22), все умножения – именно такого рода. На этом примере еще раз наглядно убеждаемся в преимуществах двоичной системы.

ра чисел, тех приглашаю осмотреть со мною небольшой ряд ближайших витрин.

Числовые диковинки, о которых сейчас пойдет речь, потребуют от читателей знакомства с так называемыми бесконечными периодическими дробями. Тем, кто не знаком с ними, предлагаю превратить, по общеизвестному способу, следующие обыкновенные дроби в десятичные:

$$1/4; 1/8; 1/3; 1/11$$

Легко убедиться, что первые две дроби при превращении в десятичные дают конечное число цифр:

$$1/4 = 0,25; 1/8 = 0,125.$$

При превращении же в десятичные остальных дробей получаются бесконечные ряды цифр, повторяющихся в определенном порядке:

$$1/3 = 0,3333...; 1/11 = 0,090909090...$$

Такие дроби называются *периодическими*, а повторяющаяся в них группа цифр – *периодом*.

### 37. МАГИЧЕСКИЕ КОЛЬЦА

Что за странные кольца выставлены в следующей витрине нашей галереи!

Перед нами (рис. 31) три плоских кольца, вращающихся одно в другом. На каждом кольце написаны шесть цифр в одном и том же порядке, именно они образуют число 142 857. Кольца обладают следующим удивительным свойством: как бы ни были они повернуты, мы при сложении двух написанных на них чисел, – считая от любой цифры в направлении часовой стрелки, – получим во всех случаях то же самое шестизначное число (если только резуль-

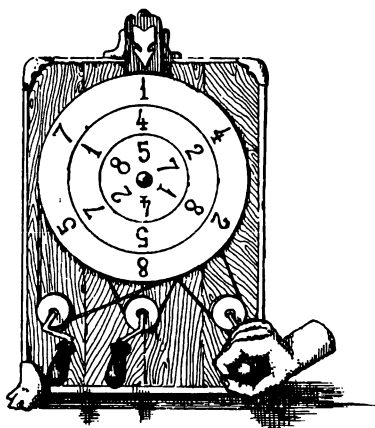


Рис. 31. Вращающиеся числовые кольца.

При другом расположении колец относительно друг друга (рис. 32) имеем такие случаи:

$$\begin{array}{r} + 285\ 714 \\ + 571\ 428 \\ \hline 857\ 142, \end{array} \quad \begin{array}{r} + 714\ 285 \\ + 142\ 857 \\ \hline 857\ 142 \end{array}$$

и т. п.

Исключение составляет случай, когда в результате получается 999 999 (рис. 33):

$$\begin{array}{r} + 285\ 714 \\ + 714\ 285 \\ \hline 999\ 999 \end{array}$$

(Причину других отступлений от указанного правила читатель поймет, когда дочитает эту задачу до конца.)

тат вообще будет шестизначный), лишь немного подвинутое!

В том положении, например, какое изображено на прилагаемом чертеже, мы получаем при сложении двух наружных колец:

$$\begin{array}{r} + 142\ 857 \\ + 428\ 571 \\ \hline 571\ 428, \end{array}$$

т. е. опять тот же ряд цифр: 142 857, только цифры 5 и 7 перенеслись из конца в начало.

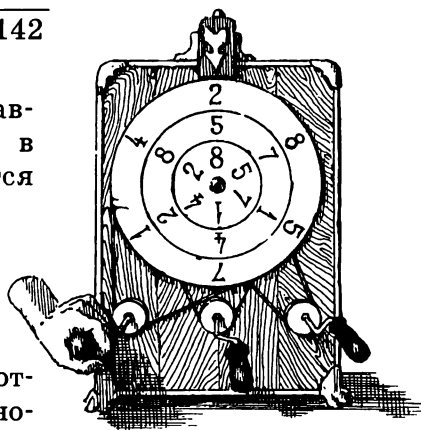


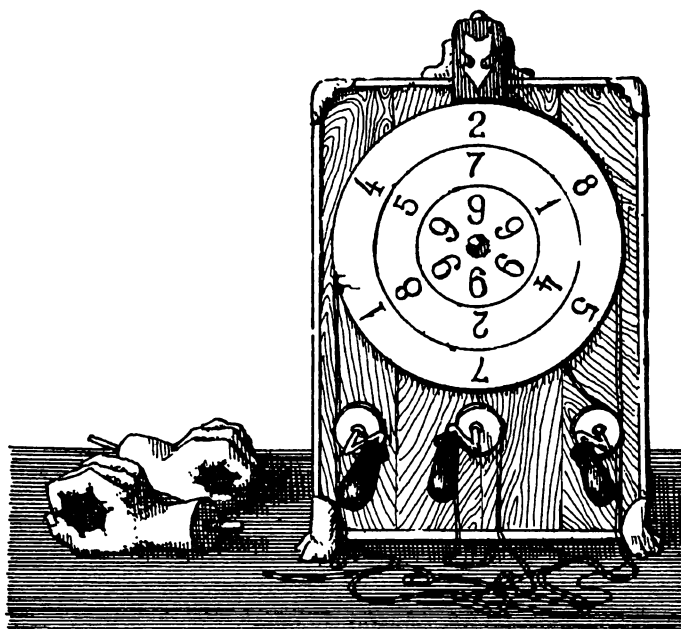
Рис. 32. Другое расположение колец.

Мало того. Тот же ряд цифр в той же последовательности получим и при *вычитании* чисел, написанных на кольцах. Например:

$$\begin{array}{r} 428\ 571 \\ - 142\ 857 \\ \hline 285\ 714, \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 571\ 428 \\ - 285\ 714 \\ \hline 285\ 714, \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 714\ 285 \\ - 142\ 857 \\ \hline 571\ 428. \end{array}$$



**Рис. 33.** *Исключение составляет случай, когда в результате имеем 999 999.*

Исключение составляет случай, когда приведенные к совпадению одинаковые цифры; разумеется, разность равна нулю.

Но и это еще не все. *Умножьте* число 142 857 на 2, на 3, на 4, на 5 на 6, — и вы получите снова то же число, лишь передвинутое, в круговом порядке, на одну или несколько цифр:

$$\begin{aligned}
142\,875 \times 2 &= 285\,714, \\
142\,875 \times 3 &= 428\,571, \\
142\,875 \times 4 &= 571\,428, \\
142\,875 \times 5 &= 714\,285, \\
142\,875 \times 6 &= 857\,142.
\end{aligned}$$

Чем же обусловлены все эти загадочные особенности нашего числа?

### *Разгадка*

Мы нападём на путь к разгадке, если продлим немного последнюю табличку и попробуем умножить наше число на 7. В результате получится: 999 999. Значит, число 142 857 – не что иное, как седьмая часть 999 999, и следовательно, дробь

$$\frac{142\,857}{999\,999} = \frac{1}{7}$$

Действительно если станете превращать  $\frac{1}{7}$  в десятичную дробь, вы получите:

$$1 : 7 = 0,142857..., \text{ т. е. } 1/7 = 0,(142857)$$

$$\begin{array}{r}
10 \\
\underline{30} \\
20 \\
\underline{60} \\
40 \\
\underline{50} \\
1.
\end{array}$$

Наше загадочное число есть период бесконечной периодической дроби, которая получается при превращении  $\frac{1}{7}$  в десятичную. Становится понятным теперь, почему при удвоении, утроении и т. д. этого числа происходит лишь перестановка одной группы цифр на другое место.

Ведь умножение этого числа на 2 делает его равным  $\frac{2}{7}$ , и следовательно, равносильно превращению в десятичную дробь уже не  $\frac{1}{7}$ , а  $\frac{2}{7}$ . Начав же превращать дробь  $\frac{2}{7}$  в десятичную, вы сразу заметите, что цифра 2 – один из тех остатков, которые у нас уже получались при превращении  $\frac{1}{7}$ : ясно, что должен повториться и прежний ряд цифр частного, но начнется он с другой цифры; иными словами, должен получиться тот же период, но только несколько начальных цифр его очутятся на конце.

То же самое произойдет и при умножении на 3, на 4, на 5 и 6, т. е. на все числа, получающиеся в остатках. При умножении же на 7 мы должны получить единицу, или – что то же самое – 0,9999...

Любопытные результаты сложения и вычитания чисел на кольцах находят себе объяснение в том же факте, что число 142 857 есть период дроби, равной  $\frac{1}{7}$ .

В самом деле, что мы, собственно, делаем, поворачивая кольцо на несколько цифр? Переставляем группу цифр с начала на конец, т. е. согласно только что сказанному умножаем число 142 857 на 2, на 3, на 4 и т. д. Следовательно, все действия сложения или вычитания чисел, написанных на кольцах, сводятся к сложению или вычитанию дробей  $\frac{1}{7}$ ,  $\frac{2}{7}$ ,  $\frac{3}{7}$  и т. д. В результате мы должны получить, конечно, несколько седьмых долей, т. е. опять-таки наш ряд цифр: 142 857 – в той или иной круговой перестановке.

Отсюда надо исключить лишь случаи, когда складываются такие числа седьмых долей, которые в сумме дают единицу или больше единицы.

Но и последние случаи исключаются не вполне: они дают результат, правда, не тождественный с рассмотренными, но все же сходный с ними.

Рассмотрим внимательнее, что должно получиться от умножения нашего загадочного числа на множитель больше 7, т. е. на 8, на 9 и т. д. Умножить 142 857, например, на 8 мы можем так: умножить сначала на 7 и к произведению (т. е. к 999 999) прибавить наше число:

$$\begin{aligned} 142\,857 \times 8 &= 142\,857 \times 7 + 142\,857 = \\ 999\,999 + 142\,857 &= 1\,000\,000 - 1 + 142\,857 = \\ &1\,000\,000 + (142\,857 - 1) \end{aligned}$$

Окончательный результат, 1 142 856, отличается от умножаемого 142 857 только тем, что впереди стоит еще одна единица, а последняя цифра на единицу же уменьшена.

По сходному же правилу составляются произведения 142 857 на всякое другое число, большее 7, как легко усмотреть из следующих строк:

$$\begin{aligned} 142\,857 \times 8 &= (142\,857 \times 7) + 142\,857 = 1\,142\,856, \\ 142\,857 \times 9 &= (142\,857 \times 7) + (142\,857 \times 2) = 1\,285\,713, \\ 142\,857 \times 10 &= (142\,857 \times 7) + (142\,857 \times 3) = 1\,428\,570, \\ 142\,857 \times 16 &= (142\,857 \times 7 \times 2) + (142\,857 \times 2) = 2\,285\,712, \\ 142\,857 \times 39 &= (142\,857 \times 7 \times 5) + (142\,857 \times 4) = 5\,571\,423. \end{aligned}$$

*Общее правило* здесь такое: при умножении 142 857 на любой множитель нужно умножить лишь на остаток от деления множителя на 7; впереди этого произведения ставится число, показывающее, сколько семерок в множителе, и то же число вычитается из результата<sup>1</sup>.

Пусть мы желаем умножить 142 857 на 86. Множитель 86 при делении на 7 дает в частном 12 и в остатке 2. Следовательно, результат умножения таков:

---

<sup>1</sup> Если множитель кратен 7, то результат равен числу 999 999, умноженному на число семерок в множителе; такое умножение легко выполнить в уме. Например,

$$142\,857 \times 28 = 999\,999 \times 4 = 4\,000\,000 - 4 = 3\,999\,996.$$



$$12\ 571\ 428 - 12 = 12\ 571\ 416.$$

От умножения  $142\ 857 \times 365$  мы получим (так как 365 при делении на 7 дает в частном 52, а в остатке 1):

$$52\ 142\ 857 - 52 = 52\ 142\ 805.$$

Усвоив это простое правило и запомнив результаты умножения нашего диковинного числа на множители от 2 до 6 (что весьма нетрудно, — нужно помнить лишь, с какой цифры они начинаются), вы можете изумлять непосвященных молниеносным умножением шестизначного числа. А чтобы не забыть это удивительное число, заметим, что оно произошло от  $\frac{1}{7}$ , или — что то же самое — от  $\frac{2}{14}$ ; вот вам первые три цифры нашего числа: 142. Остальные три получаютсЯ вычитанием первых трех из 999:

$$\begin{array}{r} 999 \\ - 142\ 857 \\ \hline 857 \end{array}$$

Мы уже имели дело с такими числами — именно когда познакомились со свойствами числа 999. Вспомнив сказанное там, мы сразу сообразим, что число 142 857 есть, очевидно, результат умножения 143 на 999:

$$142\ 857 = 143 \times 999.$$

Но  $143 = 13 \times 11$ . Припомним замеченное раньше о числе 1001, равном  $7 \times 11 \times 13$ , мы будем в состоянии, не выполняя действия, предсказать, что должно получиться от умножения  $142\ 857 \times 7$ :

$$\begin{aligned} 142\ 857 \times 7 &= 143 \times 999 \times 7 = 999 \times 11 \times 13 \times 7 = \\ &= 999 \times 1001 = 999\ 999 \end{aligned}$$

(все эти преобразования мы, конечно, можем проделать в уме).

## 38. ФЕНОМЕНАЛЬНОЕ СЕМЕЙСТВО

Только что рассмотренное число 142 857 является одним из членов целого *семейства чисел*, обладающих теми же свойствами. Вот еще одно такое число: 0 588 235 294 117 647 (ноль впереди необходим). Если умножить это число, например, на 4, мы получим тот же ряд цифр, только первые четыре цифры будут переставлены в конец:

$$0\ 588\ 235\ 294\ 117\ 647 \times 4 = 2\ 352\ 941\ 176\ 470\ 588.$$

Расположив цифры этого числа на ряде подвижных колец (рис. 33), как в предыдущем случае, мы при *сложении* чисел двух колец будем получать то же число, лишь смещенное в круговом порядке:

$$\begin{array}{r} +\ 0\ 588\ 235\ 294\ 117\ 647 \\ +\ 2\ 352\ 941\ 176\ 470\ 588 \\ \hline 2\ 941\ 176\ 470\ 588\ 235. \end{array}$$

При кольцевом расположении все три ряда, конечно, тождественны.

От вычитания чисел двух колец опять-таки получается тот же круг цифр:

$$\begin{array}{r} 2\ 352\ 941\ 176\ 470\ 588 \\ -\ 0\ 588\ 235\ 294\ 117\ 647 \\ \hline 1\ 764\ 705\ 882\ 352\ 941. \end{array}$$

Наконец, это число, как и рассмотренное ранее, состоит из двух половин: цифры второй половины являются дополнением цифр первой половины до 9.

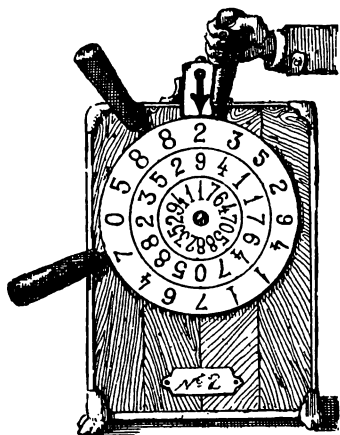


Рис. 34. Еще одно удивительное число.

Попробуйте найти разгадку всех этих особенностей.

### *Разгадка*

Нетрудно догадаться, каким образом приведенный числовой ряд оказался близким родственником числа 142 857: последнее число представляет собой период бесконечной дроби равной  $\frac{1}{7}$  новое же число является, вероятно, периодом какой-нибудь другой дроби.

Так и есть, наш длинный ряд цифр – не что иное, как период бесконечной дроби, получающийся от превращения в десятичную простой дроби  $\frac{1}{17}$ :

$$\frac{1}{17} = 0,(0\ 588\ 235\ 294\ 117\ 647).$$

Вот почему при умножении этого числа на множители от 1 до 16 получается тот же ряд цифр, в котором лишь одна или несколько начальных цифр перенесены в конец числа. И наоборот, перенося одну или несколько цифр ряда из начала в конец, мы тем самым увеличиваем число в несколько раз (от 1 до 16 включительно). Складывая два кольца, повернутых одно относительно другого, мы производим сложение двух *умноженных* чисел – например, утроенного и удесятеренного – и, конечно, должны получить то же кольцо цифр, потому что умножение на  $3 + 10$ , т. е. на 13, вызывает лишь перестановку группы цифр, незаметную при круговом расположении.

При некотором положении колец получаются, однако, суммы, немного отличающиеся от первоначального ряда. Если, например, повернем кольцо так, чтобы складывать пришлось шестикратное число с пятнадцатикратным, то в сумме должно получиться число, умноженное на  $6 + 15 = 21$ . А такое произведение, как легко догадаться, состав-

ляется уже несколько иначе, чем произведение на множитель, меньший 17.

В самом деле, так как наше число есть период дроби, равной  $\frac{1}{17}$ , то, будучи умножено на 17, оно должно дать 16 девяток (т. е. столько, сколько цифр в периоде нашей периодической дроби), или 1 с 17 нулями минус 1. Поэтому при умножении на 21 (т. е. на  $4 + 17$ ) мы должны получить четырехкратное наше число, впереди которого стоит 1, а от разряда единиц отнята 1. Четырехкратное же число начнется с цифр, получающихся при превращении в десятичную дробь простой дроби  $\frac{4}{17}$ :

$$\begin{array}{r} 4 : 17 = 0,23... \\ \hline 40 \\ \hline 60 \\ \hline 9 \end{array}$$

Порядок остальных цифр известен: 5294... Значит, 21-кратное наше число будет

$$2\ 352\ 941\ 176\ 470\ 587.$$

Столько и получается от сложения кругов цифр при соответственном их расположении. При *вычитании* числовых колец такого случая, разумеется, быть не может.

Чисел, подобных тем двум, с которыми мы познакомились, существует множество. Они составляют целое семейство, так как объединены общим происхождением — от превращения простых дробей в бесконечные десятичные.

Но не всякий период десятичной дроби обладает рассмотренным выше любопытным свойством давать при умножении круговую перестановку цифр. Не вдаваясь в тонкости теории, отметим, что это имеет место только для тех дробей, число цифр периода которых на единицу меньше знаменателя соответствующей простой дроби. Так,

$1/7$	дает	в	периоде	6	цифр,
$1/17$	«	«	«	16	«
$1/19$	«	«	«	18	«
$1/23$	«	«	«	22	«
$1/29$	«	«	«	28	«

Если указанное сейчас условие (относительно числа цифр периода) не соблюдено, то соответствующий период дает число, не принадлежащее к занимающей нас семье интересных чисел.

Например,  $1/13$  дает десятичную дробь с шестью (а не с 12) цифрами в периоде:

$$1/13 = 0,076923.$$

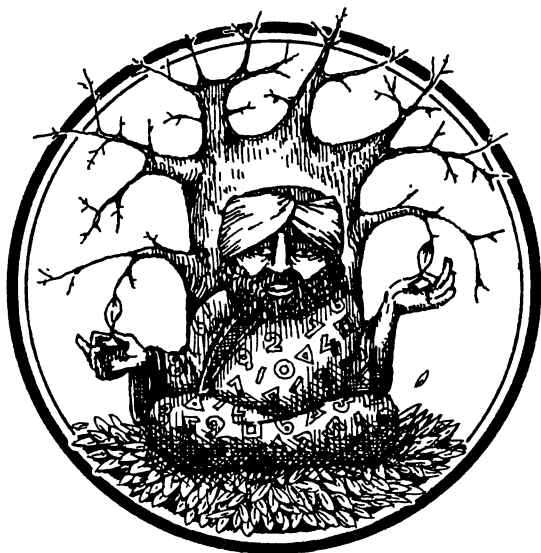
Помножив на 2, получаем совершенно иное число:

$$2/13 = 0,153846.$$

Почему?

Потому что среди остатков от деления  $1 : 13$  не было числа 2. *Различных* остатков было столько, сколько цифр в периоде, т. е. 6; различных же множителей для дроби  $1/13$  у нас 12; следовательно, не все множители будут среди остатков, а только 6.

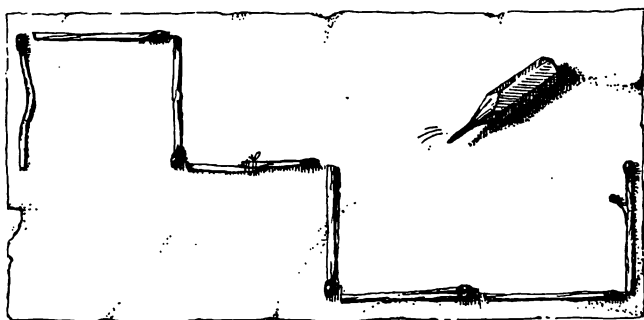
Легко убедиться, что эти множители следующие: 1, 3, 4, 9, 10, 12. Умножение на эти 6 чисел дает круговую перестановку ( $076\ 923 \times 3 = 230\ 769$ ), умножение на остальные – нет. Вот почему от  $1/13$  получается число, лишь отчасти пригодное для «магического кольца».



*Глава шестая*

Фокусы без обмана





### 39. ИСКУССТВО ИНДУССКОГО СЧЕТЧИКА

Арифметические фокусы — честные, добросовестные фокусы. Здесь не стремятся обмануть, не стараются усыпить внимание зрителя. Чтобы выполнить арифметический фокус, не нужны ни чудодейственная ловкость рук, ни изумительное проворство движений, ни какие-либо другие артистические способности, требующие иногда многолетних упражнений.

Весь секрет арифметического фокуса состоит в тщательном изучении и использовании любопытных свойств чисел, в близком знакомстве с их особенностями. Кто знает разгадку такого фокуса, тому все представляется простым и ясным; а для не знающего арифметики и самое обычное действие кажется уже чем-то вроде фокуса.

Было время, когда умение выполнять даже обыкновенные арифметические действия над большими числами, знакомое теперь каждому



школьнику, составляло искусство лишь немногих и казалось остальным какой-то сверхъестественной способностью. В древнеиндийской повести «Наль и Дамаянти»<sup>1</sup> находим отголосок такого взгляда на арифметические действия. Наль, умевший превосходно править лошадьми, вез однажды счетчика-виртуоза Ритуперна мимо развесистого дерева – Вибитак.

«Вдруг он увидел вдали Вибитак – ветвисто-густую Сенью покрытое дерево. «Слушай, – сказал он, – Здесь на земле никто не имеет всезнанья; в искусстве Править конями ты первый; зато мне далось искусство Счета...»

И в доказательство своего искусства счетчик мгновенно сосчитал число листьев на ветвистой Вибитак. Изумленный Наль просит Ритуперна открыть ему тайну его искусства, и тот соглашается.

«...Лишь только  
Вымолвил слово свое Ритуперн, как у Наля открылись  
Очи, и он все ветки, плоды и листья Вибитак  
Разом мог перечесать...»

Секрет искусства состоял, как можно догадаться, в том, что непосредственный счет листьев, требующий много времени и терпения, заменялся счетом листьев одной лишь ветки и умножением этого числа на число веток каждого сука и далее – на число сучьев дерева (предполагая, что все сучья одинаково обросли ветками, а ветки – листьями).

Разгадка большинства арифметических фокусов столь же проста, как и тайна «фокуса» Ритуперна. Стоит лишь узнать, в чем секрет фокуса, и вы сразу овладеваете искусством его выполнять,

---

<sup>1</sup> Русский (вольный) перевод Жуковского. Эпизод, о котором далее идет речь, описан в главе VIII этой повести.

как овладел легендарный Наль изумительным искусством быстрого счета.

В основе каждого арифметического фокуса лежит какая-нибудь интересная особенность чисел, и поэтому знакомство с подобными фокусами не менее поучительно, чем занимательно.

## 40. НЕ ОТКРЫВАЯ КОШЕЛЬКОВ

Фокусник высыпает на стол кучу монет на сумму 3 рубля и предлагает вам задачу: разложить деньги по 9 кошелькам так, чтобы любую сумму от 1 копейки до 3 рублей можно было уплатить, *не открывая кошельков*.

Это может показаться совершенно невыполнимым. Не думайте, однако, что фокусник расставил вам ловушку из игры слов или из неожиданного их толкования. Посмотрите: фокусник сам берется за дело. Разложив монеты по кошелькам и привязав к каждому ярлычок с обозначением вложенной

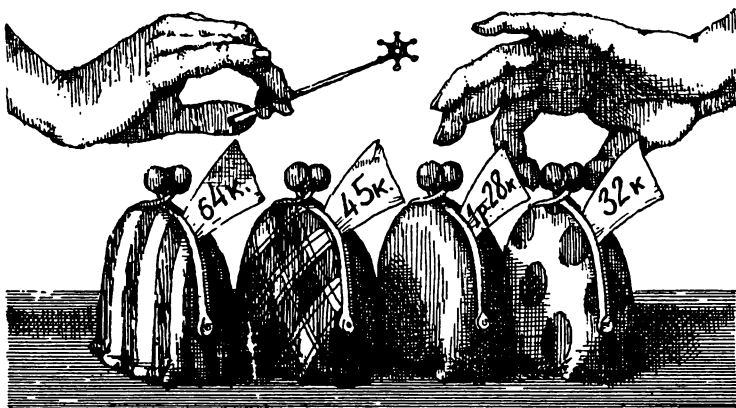


Рис. 35. Фокус с кошельками.

суммы, он предлагает вам назначить любую сумму не выше 3 рублей.

Вы называете первую пришедшую на ум: 2 руб. 69 коп. Без малейшего промедления фокусник отбирает и подает вам 4 кошелька. Вы открываете их и находите:

в одном . . . . .	0 руб. 64 коп.
в другом . . . . .	0 руб. 45 коп.
в третьем . . . . .	1 руб. 28 коп.
в четвертом . . . . .	0 руб. 32 коп.
<hr/>	
Итого . . . . .	2 руб. 69 коп.

Вы готовы заподозрить фокусника в ловкой подмене кошельков и требуете повторения фокуса. Он пододвигает все кошельки к вам, и когда вы называете новую сумму, например: 1 руб. или 7 коп., или 2 руб. 93 коп., – немедленно указывает, какие из лежащих у вас под рукою кошельков должны вы взять, чтобы составила назначенная вами сумма. А именно:

Для 1 руб. – 6 кошельков (32 коп., 1 коп., 45 коп., 16 коп., 2 коп., 4 коп.).

Для 7 коп. – 3 кошелька (1 коп., 2 коп., 4 коп.).

Для 2 руб. 93 коп. – 7 кошельков (1 руб. 28 коп., 32 коп., 8 коп., 45 коп., 64 коп., 16 коп.).

Кошельки по приказу фокусника, оказывается, всегда готовы составить любую названную сумму (до 3 рублей). Чем это объяснить?

### *Разгадка*

Секрет кроется в том, чтобы разложить монеты следующим образом:

1 коп., 2 коп., 4 коп., 8 коп., 16 коп., 32 коп.,  
64 коп., 128 коп.

и, наконец, в последний кошелек – остальные деньги, т. е.

$$300 - (1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128) = \\ = 300 - 255 = 45 \text{ (коп.)}$$

Из первых 8 кошельков возможно, как не трудно убедиться, составить любую сумму от 1 до 255 коп.; если же задается сумма большая, то пускают в дело последний кошелек с 45 копейками, а разницу составляют из первых восьми кошельков.

Вы можете проверить пригодность такой группировки чисел многочисленными пробами и убедиться, что из них можно действительно составить всякое число, не превышающее 300.

Но вас, вероятно, интересует и то, почему, собственно, ряд чисел

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 \text{ и т. д.}$$

обладает столь замечательным свойством. Это не трудно понять, если вспомнить, что числа нашего ряда представляют степени числа 2:

$$2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4 \text{ и т. д.}^1,$$

и, следовательно, их можно рассматривать как разряды двоичной системы счисления. А так как всякое число можно написать по двоичной системе, то, значит, и *всякое число возможно составить из суммы степеней 2*, т. е. из чисел ряда 1, 2, 4, 8, 16 и т. д. И когда вы подбираете кошельки, чтобы составить из их содержимого заданное число, вы, в сущности, выражаете заданное число в двоичной системе счисления.

Например, число 100 легко составить, если изобразить его в двоичной системе:

---

<sup>1</sup> Проходившие алгебру знают, что число 1 можно рассматривать как 2 в нулевой степени.

100	2						
0	50	2					
	0	25	2				
		1	12	2			
			0	6	2		
				0	3	2	
					1	1	

$$100 = \begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 64 & 32 & (16) & (8) & 4 & (2) & (1) \end{matrix}$$

$$100 = 64 + 32 + 4.$$

Напомним, что в двоичной системе на первом месте *справа* стоят единицы, на втором — двойки, на третьем — четверки, на четвертом — восьмерки и т. д.

## 41. УГАДАТЬ ЧИСЛО СПИЧЕК

Свойством двоичной системы можно воспользоваться и для следующего фокуса.

Вы предлагаете кому-нибудь взять неполный коробок со спичками, положить на стол, а рядом положить 7 бумажных квадратиков. Затем просите в *ваше отсутствие* проделать следующее: отсчитав половину спичек в коробке, перенести другую половину на крайнюю правую бумажку; спички, оставшиеся на бумажке, делим на две равные части: одну возвращаем в коробок, а другую перекладываем на соседнюю (слева) бумажку. В случае нечетного числа спичек лишнюю спичку оставляем на прежней бумажке.

Далее поступать таким же образом, возвращая всякий раз половину спичек обратно в коробок, а другую половину перекладывая на следующую бумажку, не забывая при нечетном числе спичек оставлять одну спичку.



Рис. 36.

В конце концов все спички, кроме оставшихся, возвратятся в коробок (рис. 36).

Когда это сделано, вы являетесь в комнату и, бросив взгляд на пустые бумажки, называете число спичек во взятой коробке.

Как можно по пустым бумажкам и случайным единичным спичкам догадаться о первоначальном числе спичек в коробке?

### Разгадка

Эти «пустые» бумажки в данном случае очень красноречивы: по ним и по одиночным спичкам можно буквально *прочитать* искомое число, потому что оно *написано* на столе — в двоичной системе счисления. Поясним это на примере.

Пусть число спичек было 33. Последовательные операции с ними и окончательный вид бумажек показаны на рис. 36.

Нетрудно сообразить, что проделанные со спичками операции, в сущности, те же самые, какие мы выполнили бы, если бы хотели выразить число спичек в коробке по двоичной системе счисления.

Окончательная же схема прямо изобразит это число в двоичной системе, если пустые бумажки принять за ноли, а бумажки, отмеченные сбоку спичкой, — за единицы. Читая схему слева направо, получаем:

1	0	0	0	0	1
32	(16)	(8)	(4)	(2)	1

В десятичной же системе:  $32 + 1 = 33$ .



Рис. 37.

Если бы было 28 спичек, мы имели бы иную схему, показанную на рис. 37. Искомое число, написанное по двоичной системе:

1	1	1	0	0
16	8	4	(2)	(1)

А в десятичной:  $16 + 8 + 4 = 28$ .

## 42. «ЧТЕНИЕ МЫСЛЕЙ» ПО СПИЧКАМ

Третье видоизменение того же фокуса представляет собою своеобразный способ отгадывания задуманного числа по спичкам.

Загадавший должен мысленно делить задуманное число пополам, полученную половину — опять пополам и т. д. (от нечетного числа отбрасывая единицу) — и при каждом делении класть перед собой спичку, направленную *вдоль* стола, если делится число четное, и *поперек*, если приходится делить нечетное. К концу операции получается фигура вроде показанной на рис. 38.

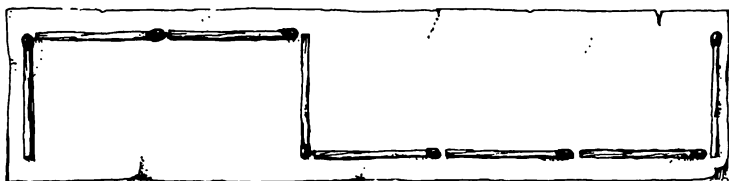


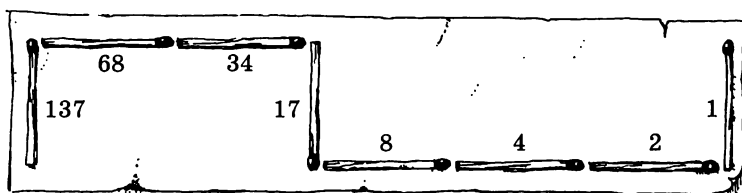
Рис. 38. Задумывание числа по спичкам.

Вы всматриваетесь в эту фигуру и безошибочно называете задуманное число: 137.

Как вы узнаете его?

### *Разгадка*

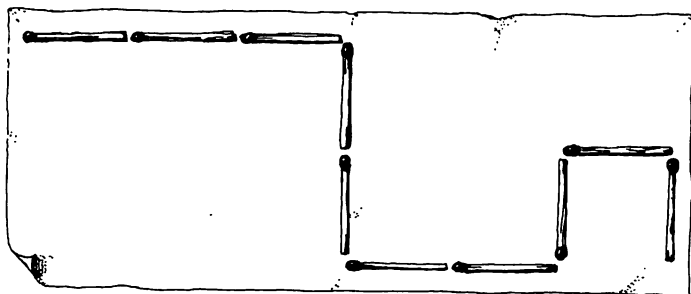
Способ станет ясен сам собою, если в выбранном примере (137) последовательно обозначить возле каждой спички то число, при делении которого она была положена (рис. 39).



**Рис. 39.** *Отгадывание числа по спичкам.*

Теперь понятно, что так как последняя спичка во всех случаях означает число 1, то не составляет труда, восходя от нее к предшествующим делениям, добраться до первоначально задуманного числа.

Например, по фигуре рис. 40 вы можете вычислить, что задумано было число 664. В самом деле, выполняя последовательно удвоения (начиная с



**Рис. 40.** *Какое число здесь изображено?*



конца) и не забывая прибавлять где надо единицу, получаем задуманное (рис. 41).

Таким образом, пользуясь спичками, вы прослеживаете ход чужих мыслей, восстанавливаете всю цепь выкладок.

Тот же результат мы можем получить иначе, сообразив, что *лежащая* спичка должна соответствовать в двоичной системе нолю (деление на 2 без остатка), а *стоящая* — единице.

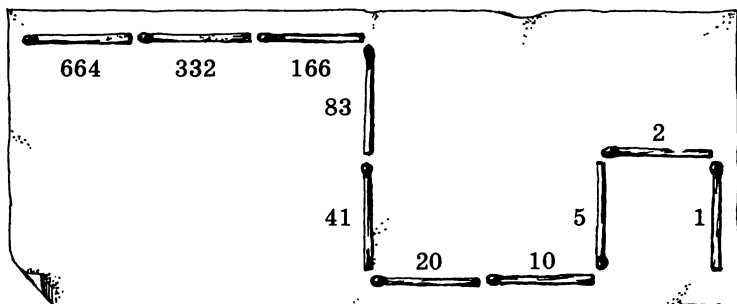


Рис. 41. Число 664.

Таким образом, в первом примере мы имеем (читая справа налево) число:

1	0	0	0	1	0	0	1
128	(64)	(32)	(16)	8	(4)	(2)	1

Или в десятичной системе:

$$128 + 8 + 1 = 137.$$

А во втором примере задуманное число изображается по двоичной системе так:

1	0	1	0	0	1	1	0	0	0
512	(256)	128	(64)	(32)	16	8	(4)	(2)	(1).

Или в десятичной системе:

$$512 + 128 + 16 + 8 = 664.$$

### Пример

Какое число задумано, если получилась фигура рис. 42?

### Решение

Числу «10 010 101» в двоичной системе соответствует в десятичной – число

$$128 + 16 + 4 + 1 = 149.$$

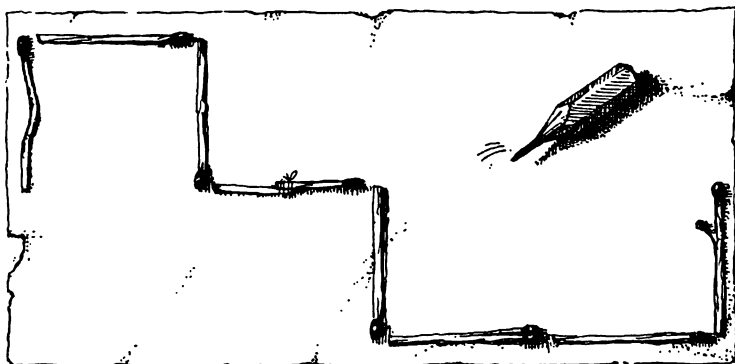


Рис. 42. Какое число изображено этой фигурой?

(Необходимо заметить, что получаемая при последнем делении единица также должна быть отмечена *стоящей* спичкой.)

## 43. ИДЕАЛЬНЫЙ РАЗНОВЕС

У некоторых читателей, вероятно, возник уже вопрос: почему для выполнения описанных раньше опытов мы пользуемся именно *двоичной* системой? Ведь каждое число можно изобразить в любой системе, между прочим и в десятичной.

Чем же объясняется предпочтение здесь двоичной?

Объясняется это тем, что в этой системе, кроме ноля, употребляется всего лишь одна цифра – единица, а следовательно, число составляется из различных степеней числа 2, взятых только по *одному* разу. Если бы в фокусе с кошельками мы распределили деньги, например, по пятеричной системе, то могли бы составить, не раскрывая кошельков, любую сумму лишь в том случае, когда каждый из кошельков повторяется у нас не менее 4 раз (в пятеричной системе употребляются ведь, кроме ноля, еще 4 цифры).

Впрочем, бывают случаи, когда для подобных надобностей удобнее пользоваться не двоичной, а троичной системой, несколько видоизмененной. Сюда относится знаменитая старинная «задача о гирях», которая может послужить сюжетом и для арифметического фокуса.

### *Задача*

Представьте, что вам предложили придумать набор из 4 гирь, с помощью которых возможно было бы отвесить любое целое число килограммов от 1 до 40.

Двоичная система подсказывает вам набор:

1 кг, 2 кг, 4 кг, 8 кг, 16 кг,

которым можно отвешивать все грузы от 1 до 31 кг.

Но это, очевидно, не удовлетворяет требуемым условиям ни по числу гирь, ни по предельному грузу (31 кг вместо 40).

С другой стороны, вы не использовали здесь возможности класть гири не только на одну чашку весов, но и на две, т. е. обходиться не только суммой гирь, но и их разностью. Последнее дает так много разнообразных комбинаций, что вы совершенно теряетесь в поисках, не умея уложить их в какую-либо систему.

Если вам не посчастливится напасть на правильный путь, то вы готовы будете даже сомневаться вообще в разрешимости задачи столь малым числом гирь, как четыре.

### Решение

Посвященный выходит из этого затруднения с волшебной простотой, намечая следующие 4 гири:

1 кг, 3 кг, 9 кг, 27 кг.

Любое целое число килограммов, до 40 кг, вы можете отвесить такими гирями, кладя их то на одну, то на обе чашки весов. Не приводим примеров, потому что каждый легко может сам убедиться в полной пригодности такого набора гирь для нашей цели. Остановимся лучше на том, *почему* именно указанный ряд обладает этим свойством.

Вероятно, читатели уже заметили, что числа эти – ряд степеней<sup>1</sup> числа 3:

$3^0, 3^1, 3^2, 3^3$ .

Это значит, что мы обращаемся здесь к услугам *троичной* системы счисления. Гири – цифры этой троичной системы.

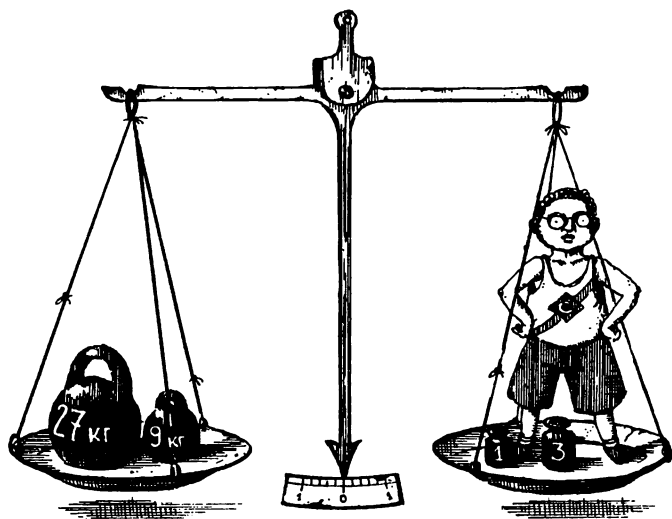
Но как воспользоваться ею, когда требуемый вес получается в виде *разности* двух гирь?

И как избежать необходимости обращаться к удвоению гирь? В троичной системе ведь, кроме ноля, употребляются еще две цифры: 1 и 2.

То и другое достигается введением «отрицательных» цифр. Дело сводится просто к тому, что вместо цифры 2 употребляют  $3 - 1$ , т. е. единицу высшего разряда, от которой *отнимается* одна единица низшего. Например, число 2 в нашей ви-

---

<sup>1</sup> Единицу можно рассматривать, как нулевую степень числа 3 (вообще как нулевую степень любого числа).



**Рис. 43.** С помощью этих четырех гирь можно взвешивать любой груз от 1 до 40 кг.

доизмененной троичной системе обозначается не 2, а  $1\bar{1}$ , где знак минус над цифрой единиц означает, что единица эта не прибавляется, а отнимается. Точно так же число 5 изобразится не 12, а  $1\bar{1}\bar{1}$  (т. е.  $9 - 3 - 1 = 5$ ).

Теперь ясно, что если любое число можно изобразить в троичной системе с помощью ноля (т. е. знака отсутствия числа) и одной только цифры, именно прибавляемой или отнимаемой единицы, то из чисел 1, 3, 9, 27 можно, складывая или вычитая их, составить все числа от 1 до 40. Мы как бы пишем все эти числа, употребляя гири вместо цифр. Случай сложения отвечает при взвешивании случаю, когда гири помещаются все на одну чашку, а случай вычитания — когда часть гирь кладется на чашку с товаром и, следовательно, вес их *отнимается* от веса остальных гирь. Ноль соответствует *отсутствию* гири.

Вес	Левая чашка	Правая чашка	Вес	Левая чашка	Правая чашка
1	1	0	21	27+3	9
2	3	1	22	27+3+1	9
3	3	0	23	27	3+1
4	3+1	0	24	27	3
5	9	3+1	25	27+1	3
6	9	3	26	27	1
7	9+1	3	27	27	0
8	9	1	28	27+1	0
9	9	0	29	27+3	1
10	9+1	0	30	27+3	0
11	9+3	1	31	27+3+1	0
12	9+3	0	32	27+9	3+1
13	9+3+1	0	33	27+9	3
14	27	9+3+1	34	27+9+1	3
15	27	9+3	35	27+9	1
16	27+1	9+3	36	27+9	0
17	27	9+1	37	27+9+1	0
18	27	9	38	27+9+3	1
19	27+1	9	39	27+9+3	0
20	27+3	9+1	40	27+9+3+1	0

### *Задача*

Как известно, система эта на практике не употребляется. Всюду в мире, где введена метрическая система мер, применяется набор в 1, 2, 2, 5 единиц, а не 1, 3, 9, 27, – хотя первым можно отвечать грузы только до 10 единиц, а вторым – до 40. Не применялся набор 1, 3, 9, 27 и тогда, когда метрическая система еще не была введена.

В чем же причина отказа на практике от этого, казалось бы, совершеннейшего разновеса?

### *Решение*

Причина кроется в том, что идеальный разновес удобен лишь на бумаге, на деле же пользоваться им весьма хлопотно. Если бы приходилось только отвешивать заданное число весовых единиц, – например, отвесить 400 г масла или 2500 г сахара, – то системой гирь в 100, 300, 900, 2700 можно было бы на практике пользоваться (хотя и тут приходилось бы каждый раз долго подыскивать соответствующую комбинацию). Но когда приходится определять, сколько весит данный товар, то подобный разновес оказывается крайне неудобным: здесь нередко ради прибавления к поставленным гирям одной единицы пришлось бы производить полную замену прежней комбинации другой, новой. Отвешивание становится при таких условиях делом крайне медленным и притом утомительным.

Не всякий быстро сообразит, что, например, вес 19 кг получится, если на одну чашку поставить гири в 27 кг и 1 кг, а на другую – 9 кг; вес 20 кг – если на одну чашку поставить гири в 27 кг и 3 кг, а на другую – 9 кг и 1 кг. При каждом отвешивании приходилось бы решать подобные головоломки. Разновес 1, 2, 2, 5 таких затруднений не доставляет.

## **44. ПРЕДСКАЗАТЬ СУММУ НЕНАПИСАННЫХ ЧИСЕЛ**

Одним из наиболее поражающих «номеров», выполняемых феноменальным эстрадным вычислителем Р. С. Арраго, является молниеносное – с одного взгляда – складывание целого столбца многозначных чисел.

Но что сказать о человеке, который может написать сумму еще раньше, чем ему названы все слагаемые?

Это, конечно, фокус, и выполняется он в таком виде.

### Фокус

Отгадчик предлагает вам написать какое-нибудь многозначное число по вашему выбору. Бросив взгляд на это первое слагаемое, отгадчик пишет на бумажке сумму всего будущего столбца слагаемых и передает вам на хранение. После этого он просит вас (или кого-нибудь из присутствующих) написать еще одно слагаемое, опять какое угодно. А сам затем быстро пишет третье слагаемое. Вы складываете все три написанных числа, и получается как раз тот результат, который заранее был написан отгадчиком на спрятанной у вас бумажке.

Если, например, вы написали в первый раз 83 267, то отгадчик пишет будущую сумму 183 266. Затем вы пишете, допустим, 27 935, а отгадчик приписывает третье слагаемое – 72 064:

I . . . . .	Вы:	83 267.
III . . . . .	Вы:	27 935.
IV . . . . .	Отгадчик:	72 064.
<hr/>		
II . . . . .	Сумма:	183 266.

Получается в точности предсказанная сумма, хотя отгадчик не мог знать, каково будет второе слагаемое. Отгадчик может предсказать также сумму пяти или семи слагаемых, но тогда он сам пишет два или три из них. Никакой подмены бумажки с результатом здесь заподозрить вы не можете, так как она до последнего момента хранится в вашем собственном кармане.

Очевидно, отгадчик пользуется каким-то неизвестным вам свойством чисел. Каким?



### Разгадка

Отгадчик пользуется тем, что от прибавления, скажем, к пятизначному числу числа из пяти девяток (99 999) первое увеличивается на 100 000 — 1, т. е. впереди него появляется единица, а конечная цифра уменьшается на единицу. Например:

$$\begin{array}{r} + 83\,267 \\ 99\,999 \\ \hline 183\,266. \end{array}$$

Эту сумму, т. е. сумму написанного вами числа и 99 999, отгадчик и пишет на бумажке как будущий результат сложения. А чтобы результат оправдался, он, увидев ваше второе слагаемое, выбирает свое третье слагаемое так, чтобы вместе со вторым оно составило 99 999, т. е. вычитает каждую цифру второго слагаемого из 9.

Эти операции вы легко можете теперь проследить на предыдущем примере, а также и на следующих:

I . . . . .	Вы:	379 264.
III . . . . .	Вы:	4 873.
IV . . . . .	Отгадчик:	995 126.
<hr/>		
II . . . . .	Сумма:	1 379 263.
I . . . . .	Вы:	9 035.
III . . . . .	Вы:	5 669.
IV . . . . .	Отгадчик:	4 330.
<hr/>		
II . . . . .	Сумма:	19 034.

Легко усмотреть, что вы сильно затрудните отгадчика, если второе ваше слагаемое будет заключать больше цифр, чем первое: отгадчик не сможет написать слагаемое, которое уменьшит второе число для оправдания предсказанного слишком малого результата. Поэтому опытный отгадчик предусмотрительно ограничивает свободу выбора этим условием.

Фокус выходит внушительнее, когда в придумывании слагаемых участвуют несколько лиц. После первого же слагаемого, например, 437 692, отгадчик уже предсказывает сумму всех пяти чисел, именно записывает 2 437 690 (здесь будет добавлено дважды 999 999, т. е. 2 000 000 – 2).

Дальнейшее ясно из схемы:

I . . . . .	Вы:	437 692.
III . . . . .	Другой написал:	822 541.
V . . . . .	Третий написал:	263 009.
IV . . . . .	Отгадчик добавил:	177 456.
VI	«      «	736 990.
<hr/>		
II . . .	Отгадчик предсказал:	2 437 690.

Еще пример:

I . . . . .	Вы:	7 400.
III . . . . .	Другой написал:	4 732.
V . . . . .	Третий написал:	9 000.
IV . . . . .	Отгадчик добавил:	5 267.
VI	«      «	999.
<hr/>		
II . . .	Отгадчик предсказал:	27 398.

Читателям небезынтересно будет теперь познакомиться с тем; как описан тот же фокус известным писателем В. Я. Шишковым в его романе «Странники»:

«Иван Петрович вырвал из блокнота страничку, подал мальчонке, спросил:

– Карандаш есть? Пиши любое число.

Мальчонка написал. Иван Петрович мельком взглянул на это число, написал на отдельном клочке бумаги свое какое-то число, сунул бумажку в соломку и прикрыл шляпой.

– Пиши под ним другое. Написал? Теперь я сам напишу третье. Теперь все три числа складывай. Только тщательней, не ври.

Через две минуты был готов проверенный ответ. Инженер Вошкин (прозвище мальчика) подал свои выкладки.

$$\begin{array}{r} 46\ 853 \\ 21\ 398 \\ \hline 78\ 601 \\ \hline 146\ 852 \end{array}$$

– Сто сорок шесть тысяч восемьсот пятьдесят два, Иван Петрович.

– Долго считаешь. А у меня – вот он ответ. Я уже знал его, когда ты еще первое число написал. Вот. Тяни из-под шляпы.

Мальчонка выхватил бумажку. Там значилось – 146 852».

В романе фокус оставляется неразъясненным. Но вам, конечно, вполне понятна его несложная арифметическая основа.

## 45. МНИМАЯ НЕОЖИДАННОСТЬ

В 1916 г., в разгар империалистической войны, некоторые газеты нейтральной Швейцарии занимались арифметическим «гаданием» о... грядущей судьбе императоров Германии и Австрии. «Пророки» складывали следующие столбцы чисел:

год рождения.....	1859
год вступления на престол ..	1888
число лет царствования .....	28
возраст .....	57
<hr/>	
Сумма...	3832



Рис. 44. Вильгельм II

год рождения . . . . .	1830
год вступления на престол . .	1848
число лет царствования . . . . .	68
возраст . . . . .	86
<hr/>	
Сумма . . .	3832

В совпадении сумм «про-роки» видели мрачное пред-знаменование для короно-ванных особ, и так как каж-дый итог представлял собой удвоенный 1916 год, то обо-им императорам предрекали гибель именно в этом году.



Рис. 45. Франц-Иосиф.

Между тем совпадение ре-зультатов с математической стороны не является неожиданным. Стоит немного изменить порядок слагаемых, и станет понятно, почему они дают в итоге удвоенный 1916 год. В са-мом деле, разместим слагаемые так:

год рождения,  
возраст,  
год вступления на престол,  
число лет царствования

Что должно получиться, если к году рождения прибавить возраст? Разумеется, дата того года, когда производится вычисление. Точно так же, ес-ли к году вступления на престол прибавить число лет царствования, получится опять год, когда про-изводится расчет. Ясно, что итог сложения четы-рех наших слагаемых не может быть ни чем иным, как удвоенным годом выполнения расчета. Оче-видно – судьба императоров абсолютно не зависит от подобной арифметики...

Так как о сказанном выше не все догадываются, то можно воспользоваться этим для забавного

арифметического фокуса. Предложите кому-нибудь написать тайно от вас четыре числа:

год рождения,

год поступления в школу (на завод и т. п.),

возраст,

число лет обучения в школе (работы на заводе и т. п.).

Вы беретесь отгадать сумму этих чисел, хотя ни одно из них вам не известно. Для этого вы удваиваете год выполнения фокуса и объявляете итог. Если, например, фокус показывается в 1936 году, то сумма – 3876.

Чтобы иметь возможность, не обнаруживая секрета, с успехом проделывать этот фокус несколько раз подряд, вы заставляете слушателя производить над суммой какие-нибудь арифметические действия, маскируя этим свой прием.

## 46. МГНОВЕННОЕ ДЕЛЕНИЕ

Из многочисленных разновидностей фокусов этого рода опишем один, основанный на знакомом уже нам свойстве множителя, состоящего из ряда одних девяток; когда умножают на него число со столькими же цифрами, получается результат, состоящий из двух половин: первая – это умножаемое число, уменьшенное на единицу; вторая – результат вычитания первой половины из множителя.

Например:

$$247 \times 999 = 246\,753; 1372 \times 9999 = 13\,718\,628 \text{ и т. п.}$$

Причину легко усмотреть из следующей строки:

$$247 \times 999 = 247 \times (1000 - 1) = 247\,000 - 247 = \\ 246\,999 - 246.$$

Пользуясь этим, вы предлагаете группе товарищей произвести деление многозначных чисел:

одному – 68 933 106 : 6894;  
другому – 8 765 112 348 : 9999;  
третьему – 543 456 : 544;  
четвертому – 12 948 705 : 1295 и т. д.

А сами беретесь обогнать их всех, выполняя те же задачи. И, прежде чем они успеют приняться за дело, вы уже вручаете каждому бумажку с полученным вами безошибочным результатом деления:

первому – 9999;  
второму – 87 652;  
третьему – 999;  
четвертому – 9999.

Вы можете сами придумать по указанному образцу ряд других способов поражать непосвященных мгновенным выполнением деления: для этого воспользуйтесь некоторыми свойствами тех чисел, которые помещены в «Галерею числовых диковинок» (см. главу пятую).

## 47. ЛЮБИМАЯ ЦИФРА

Попросите кого-нибудь сообщить вам его любимую цифру. Допустим, вам назвали цифру 6.

– Вот удивительно! – восклицаете вы. – Да ведь это как раз самая замечательная из всех значащих цифр!

– Чем же она замечательна? – осведомляется заинтересованный собеседник.

– Вот посмотрите: умножьте вашу любимую цифру на число значащих цифр, т. е. на 9, и полученное число (54) подпишите множителем под числом 12 345 679:

$$\begin{array}{r} 12\,345\,679 \\ \times 54 \\ \hline \end{array}$$

Что получится в произведении?

Ваш собеседник выполняет умножение и с изумлением получает результат, состоящий сплошь из его любимых цифр:

6 666 666 666.

– Видите, какой у вас тонкий арифметический вкус, – заканчиваете вы. – Вы сумели избрать из всех цифр как раз ту, которая обладает столь замечательным свойством!

Однако в чем тут дело?

Точно такой же изысканный вкус оказался бы у вашего собеседника, если бы он избрал какую угодно другую из девяти значащих цифр, потому что каждая из них обладает тем же свойством:

12 345 679	12 345 679	12 345 679
$\times 4 \times 9$	$\times 7 \times 9$	$\times 9 \times 9$
<hr/>	<hr/>	<hr/>
444 444 444,	777 777 777,	999 999 999

Почему это так, вы сообразите, если припомните то, что говорилось о числе 12 345 679 в «Галерее числовых дикувинок».

## 48. УГАДАТЬ ДАТУ РОЖДЕНИЯ

Фокусы, относящиеся к этой категории, могут быть изменены на разные лады.

Опишу один из видов этого фокуса, довольно сложный, но именно потому и производящий сильное впечатление.

### *Фокус*

Допустим, что вы родились 18 мая и что вам 23 полных года. Я, конечно, не знаю ни даты вашего рождения, ни вашего возраста. Тем не менее я берусь отгадать то и другое, заставив вас проделать лишь некоторый ряд вычислений.

А именно: порядковый номер месяца (май, 5-й месяц) я прошу вас умножить на 100, прибавить к произведению число месяца (18), сумму удвоить, к результату прибавить 8, полученное число умножить на 5, к произведению прибавить 4, помножить результат на 10, прибавить 4 и к полученному числу прибавить ваш возраст (23).

Когда вы все это сделаете, вы сообщаете мне окончательный результат вычислений. Я вычитаю из него 444, а разность разбиваю на грани, справа налево, по 2 цифры в каждой, получаю сразу как число и месяц даты вашего рождения, так и ваш возраст.

Действительно. Сделаем последовательно все указанные вычисления:

$$\begin{aligned}5 \times 100 &= 500, \\500 + 18 &= 518, \\518 \times 2 &= 1036, \\1036 + 8 &= 1044, \\1044 \times 5 &= 5220, \\5220 + 4 &= 5224, \\5224 \times 10 &= 52\,240, \\52\,240 + 4 &= 52\,244, \\52\,244 + 23 &= 52\,267.\end{aligned}$$

Произведя вычитание  $52\,267 - 444$ , получаем число 51 823.

Теперь разобьем это число на грани, справа налево, по две цифры в каждой. Имеем:

$$5 - 18 - 23,$$

т. е. 5-й месяц (май), число 18, возраст 23 года. Почему же так получилось?

### *Разгадка*

Секрет наш легко понять из рассмотрения следующего равенства:



$$\{[(100m + t) \times 2 + 8] \times 5 + 4\} \times 10 + 4 + n - 444 = \\ = 10\,000m + 100t + n.$$

Здесь буква  $m$  обозначает порядковый номер месяца,  $t$  — число месяца,  $n$  — возраст. Левая часть равенства выражает все последовательно произведенные вами действия, а правая — то, что должно получиться, если раскрыть скобки и проделать возможные упрощения.

В выражении  $(10\,000m + 100t + n)$  ни  $m$ , ни  $t$ , ни  $n$  не могут быть более чем двузначными числами, поэтому число, получающееся в результате, всегда должно при делении на грани, по две цифры в каждой, расчлениваться на три части, выраженные искомыми числами  $m$ ,  $t$  и  $n$ .

Предоставляем изобретательности читателя придумать видоизменения фокуса, т. е. другие комбинации действий, дающие подобный же результат.

## 49. ОДНО ИЗ «УТЕШНЫХ ДЕЙСТВИЙ» МАГНИЦКОГО

Предлагаю читателю раскрыть также секрет следующего незамысловатого фокуса, который был описан еще в «Арифметике» Магницкого в главе «Об утешных неких действиях через арифметику употребляемых».

Пусть кто-либо задумает какое-нибудь число, относящееся к деньгам, к дням, к часам или к какой-либо иной числимой вещи. Остановимся на примере перстня, надетого на 2-й сустав мизинца (т. е. 5-го пальца) 4-го из 8 человек.

Когда в это общество является отгадчик, его спрашивают: у кого из восьми человек (обозначен-

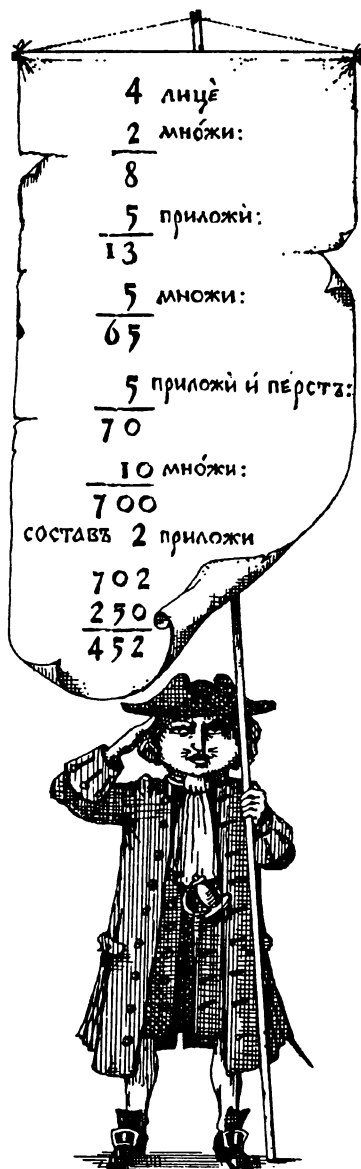


Рис. 46. Математический фокус из «Арифметики» Магницкого.

ных номерами от 1 до 8), на каком пальце и на каком суставе находится перстень?

«Он же рече: кто-либо от вас умножи одного, который взял через 2, и к тому приложи 5, потом паки (снова) умножи через 5, также приложи перст на нем же есть перстень (т. е. к полученному прибавь номер пальца с перстнем). А потом умножи через 10, и приложи сустав на нем же перстень вложен, и от сих произведенное число скажи им, по нему же искомое получиши.

Они же твориша (поступили) якоже повеле им, умножаху четвертого человека, который взял перстень, и прочая вся, яже велеша им, якоже явлено есть (см. выкладки); из всего собрания пришло ему число 702, из него же он вычитал 250, осталось 452, т. е. 4-й человек, 5-й палец, 2-й сустав».

Не надо удивляться, что этот арифметический фокус был известен еще 200 лет назад: задачу совершенно подобного же рода я нашел в одном из первых сборников математических развлечений, именно у Баше де Мезирьяка, в его книге «Занимательные и приятные числовые задачи», вышедшей в 1612 г.; а туда она попала из сочинения Леонардо Пизанского (1202 г.). Нужно вообще заметить, что большая часть математических игр, головоломок и развлечений, которые в ходу в настоящее время, очень древнего происхождения.

## 50. ОТГАДЫВАНИЕ ЧИСЕЛ

В заключение, ничего у вас не спрашивая, я отгадываю результат, который вы получите в итоге выкладок над задуманным вами числом.

## *Фокус*

Задумайте любую цифру, кроме нуля. Умножьте ее на 37. Полученное умножьте на 3. Последнюю цифру произведения зачеркните, а оставшееся число разделите на первоначально задуманную цифру; остатка не будет.

Я могу сказать вам, какое число вы получили, хотя все это я написал задолго до того, как вы приступили к чтению книги.

У вас получилось число 11.

Второй раз проделаем фокус на иной лад. Задумайте двузначное число. Припишите к нему справа то же число еще раз. Полученное четырехзначное число разделите на то, которое вы первоначально задумали, — деление выполнится нацело. Все цифры частного сложите.

У вас получилось 2.

Если это не так, то проверьте внимательно свои вычисления и убедитесь, что ошиблись вы, а не я.

В чем разгадка этих фокусов?

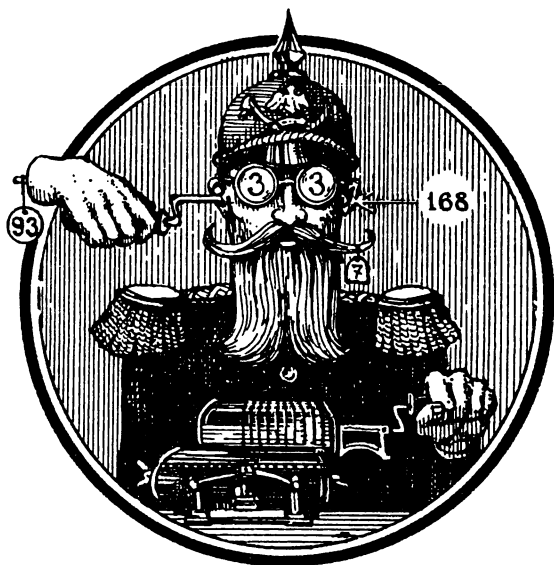
## *Разгадка*

Наш читатель теперь достаточно уже опытен в разгадывании фокусов и не потребует от меня долгих объяснений.

В первом опыте отгадывания задуманное число умножалось сначала на 37, потом на 3. Но  $37 \times 3 = 111$ , а умножить цифру на 111 — значит составить число из трех таких же одинаковых цифр (например,  $4 \times 37 \times 3 = 444$ ). Что мы проделали далее? Мы зачеркнули последнюю цифру и, следовательно, получили число из двух одинаковых цифр (44), которое, конечно, должно делиться на задуманную цифру и дать в частном 11.

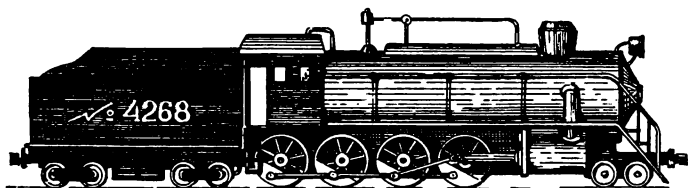
Во втором опыте задуманное двузначное число мы писали дважды кряду: например, задумав 29, писали 2929. Это все равно, что умножить задуманное число на 101 (в самом деле,  $29 \times 101 = 2929$ ). Раз я это знаю, я могу с уверенностью предвидеть, что от деления такого четырехзначного числа на задуманное число получится 101 и что, следовательно, сумма цифр частного ( $1 + 0 + 1$ ) = 2.

Как видите, отгадывание основано на свойствах чисел 111 и 101; мы вправе поместить оба эти числа в нашу арифметическую кунсткамеру.



*Глава седьмая*  
**Быстрый счет**





## 51. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ И МНИМЫЕ ФЕНОМЕНЫ

Кому приходилось присутствовать на сеансах известного эстрадного вычислителя Р. С. Арраго, тот, без сомнения, не мог не поразиться его счетным способностям. Тут перед нами уже не фокусы, а редкое природное дарование. Куб числа 4729, например, Арраго вычислил при мне, в уме, менее чем в одну минуту (результат — 105 756 712 489), а на умножение  $679\,321 \times 887\,064$ , также в уме, ему потребовалось всего полторы минуты.

Я имел возможность наблюдать вычислительную работу этого феноменального счетчика не только на эстраде, но и в домашней обстановке, с глазу на глаз, и мог убедиться, что никакими особыми вычислительными приемами он не пользуется, а считает в уме, в общем, так же, как мы на бумаге. Но необычайная его память на числа помогает ему обходиться без записи промежуточных результатов, а быстрая сообразительность позво-



ляет оперировать с двузначными числами так же легко, как мы производим действия над числами однозначными. Благодаря этому умножение шестизначного числа на шестизначное является для него задачей не большей трудности, чем для нас — умножение трехзначного на трехзначное.

Такие феномены, как у нас Арраго или на Западе — Иноди, Диаманди, Рюкле и недавно превзошедший всех д-р Фред Браунс, встречаются единицами. Но наряду с ними подвизаются и эстрадные математики иного рода, основывающие свое искусство на тех или иных арифметических трюках.

Вам, быть может, приходилось слышать или даже присутствовать на «сеансах гениальных математиков», вычислявших в уме с поразительной быстротой, сколько вам минуло дней, минут, секунд, в какой день недели вы родились и т. п. Чтобы выполнить большую часть этих вычислений, не нужно, однако, обладать необычайными математическими способностями. Надо лишь знать кое-какие секреты этих фокусов, разоблачением которых мы сейчас и займемся.

## 52. ЗАПОМИНАНИЕ ЧИСЕЛ

Быстрый вычислитель должен прежде всего обладать превосходной развитой памятью на числа. До какой изощренности доходит такая память у лучших счетчиков, показывают следующие рекорды.

Знаменитый немецкий вычислитель Рюкле выучил наизусть число, состоявшее из 504 цифр, в течение 35 минут, а его соотечественник д-р Браунс побил этот рекорд, сделав то же самое менее чем в 13 минут!

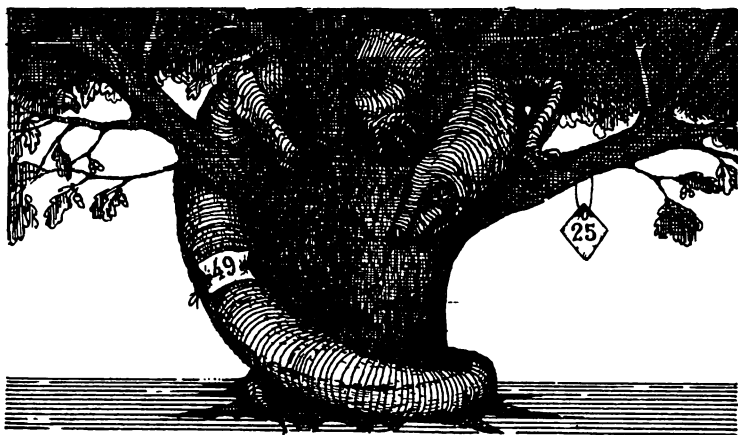
Но, конечно, такой феноменальной памятью наделены от природы лишь отдельные единицы. Профессиональные счетчики, подвизающиеся на эст-



*Рис. 47. Как запомнить номер?*

раде, не обладая прирожденной памятью на числа, помогают себе различными искусственными приемами (так называемыми «мнемоническими»).

В обиходной жизни мы и сами зачастую пытаемся пользоваться подобными приемами, большей частью, надо признаться, довольно неудачно выбранными. Желая, например, запомнить номер телефона 49-25, мы возлагаем надежды на то, что число это легко удастся восстановить в памяти, так как оно составлено из двух точных квадратов:



*Рис. 48. Легче запомнить «дуб» и «ящер», чем числа.*

$$49=7^2, 25=5^2.$$

Но когда является надобность действительно вспомнить его, к нашим услугам оказывается безнадёжно-обширный выбор номеров:

16–25, 36–64, 25–16, 64–16, 81–25 и т. д.

Подобная же неудача постигает нас и в других случаях. Телефон 17–53 мы собираемся запомнить, пользуясь тем, что сумма первых двух цифр ( $1 + 7$ ) равна сумме двух последних ( $5 + 3$ ). Но финал оказывается не лучше, чем в предыдущем случае. А ведь надо еще не спутать, к чьему телефону была применена та и к какому – иная комбинация. Можно только удивляться, как упорно люди пытаются пользоваться этим явно негодным приемом.

Пристрастие к нему остроумно высмеял писатель Я. Гашек в своих знаменитых «Похождениях бравого солдата Швейка»:

«Швейк разглядывал номер своей винтовки и, наконец, сказал:

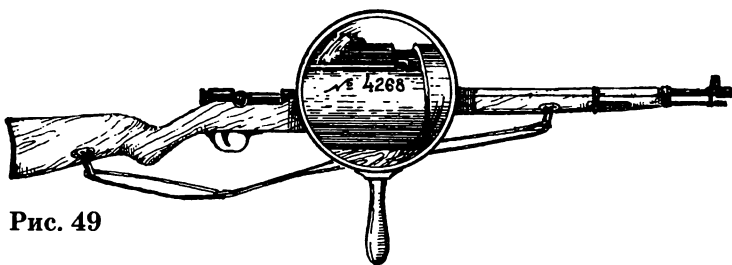


Рис. 49

– Номер 4268. Как раз такой номер был у одного паровоза в Пече на шестнадцатом пути. Паровоз надо было увести в Лиссу для ремонта, но это не так-то просто было, потому что у машиниста, который должен был его отвести туда, была очень плохая память на номера. Тогда начальник дистанции вызвал его к себе в канцелярию и говорит ему:

– На 1-м пути стоит паровоз № 4268. Я знаю, что у вас плохая память на номера, а если вам написать номер на бумажке, то вы бумажку потеряете. Но уж если вы так слабы на номера, то постарайтесь запомнить, что я вам сейчас скажу, и вы увидите, что можно с легкостью заметить себе любой номер. Ну, так вот. Паровоз, который вам надо отвести в депо, значится за номером 4268. Вот и обра-

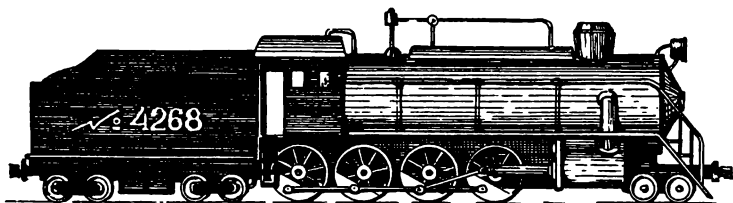


Рис. 50

тите внимание. Первая цифра – четверка, вторая – двойка. Запомните, стало быть, 42, т. е. дважды два – четыре, что дает нам первую цифру, а если разделить ее на два, то получится опять два, и таким образом у нас получается рядом 4 и 2. Дальше уже просто. Сколько будет дважды четыре? Восемь, не так ли? Вот вы и запечатлейте в памяти, что восьмерка в нашем номере является последней цифрой. Теперь вы уже запомнили, что первая цифра – четверка, вторая – двойка, а последняя – восьмерка. Значит, остается только запомнить цифру шесть перед восьмеркой. Но и это совсем просто. Ведь первая цифра у нас 4, вторая 2, а вместе они как раз составляют 6. Вот и номер 4268 крепко засел у вас в голове. Вы можете также прийти к результату более простым путем, а именно: из 8 вычесть 2, получится 6. Запомните: 6. Из шести вычесть два, получится 4. Стало быть, имеем уже 4 и 68. Теперь надо только между этими двумя цифрами поставить цифру 2, и получим 4268. Можно

сделать и еще иначе, тоже весьма просто, при помощи умножения. Запомните, что дважды 42 равно 84. В году двенадцать месяцев. Надо вычесть 12 из 84, останется 72, и из 72 еще раз вычесть 12 месяцев. Получится 60. Вот у нас уже есть 6, потому что ноль мы можем просто отбросить. Значит, если мы напишем  $42 - 6 = 84$  и отбросим последнюю 4, то неминуемо получим число 4268, т. е. номер паровоза, который надо отвести».

Примеры эстрадных счетчиков – совершенно иного рода. Вот один из них, который может при случае пригодиться и каждому из нас.

Счетчик связывает с цифрами определенные согласные буквы, твердо выученные:

цифры	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
буквы	Н	Г	Д	К	Ч	П	Ш	С	В	Р
	М	Ж	Т	Х	Щ	Б	Л	З	Ф	Ц

Так как буквы выбраны только согласные, то их можно, не боясь путаницы, сочетать с гласными, составляя короткие словечки. Например:

для чисел	слова	для чисел	слова
1	еж	6	шея
2	яд	7	усы
3	око	8	ива
4	щи	9	яйцо
5	обои		

Сходным образом составляются слова и для двузначных чисел:

11 – гага	14 – гуца
12 – год	15 – губа
13 – жук	16 – игла

и т. п.

Чтобы запомнить число 2549, эстрадный счетчик мысленно подписывает под цифрами соответствующие им буквы

2	5	4	9
д	п	ч	р
т	б	щ	ц

и быстро составляет из них слова:

25	49
дуб	ящер

«Дуб» и «ящер» не только легко запомнить, но и связать как-нибудь с фамилией гражданина или названием учреждения, которым принадлежит телефон.

Таков один из мнемонических приемов, употребительных среди эстрадных счетчиков<sup>1</sup>. Существуют и другие, на которых мы, однако, останавливаться не будем, а перейдем к способам выполнения счетных номеров программы.

— Мне столько-то лет. Сколько мне дней? — спрашивает кто-нибудь из публики и немедленно же получает с эстрады ответ.

— А сколько мне секунд, если возраст мой такой-то? — ставит вопрос другой и также получает не менее быстрый ответ.

Как же выполняются подобные подсчеты?

### 53. «СКОЛЬКО МНЕ ДНЕЙ?»

Чтобы по числу лет быстро определить число дней, счетчик прибегает к такому приему: половину числа лет множит на 73 и приписывает ноль — результат и будет искомым числом.

---

<sup>1</sup> Подробнее об этом см. в моей книжке «Фокусы и развлечения».

Эта формула станет понятна, если заметить, что  $730 = 365 \times 2$ . Если мне 24 года, то число дней получим, умножив  $12 \times 73 = 876$  и приписав ноль — 8760. Само умножение на 73 также производится сокращенным образом, о чем речь впереди.

Поправка в несколько дней, происходящая от високосных лет, обыкновенно в расчет не принимается, хотя ее легко ввести, прибавив к результату четверть числа лет — в нашем примере  $24 : 4 = 6$ ; общий результат, следовательно, 8766.

Указанными далее приемами ускоренного умножения эти операции облегчаются до чрезвычайности, и миллионный результат получается очень быстро. Советую читателю попробовать произвести то же вычисление и обыкновенным путем, чтобы на деле убедиться, какая экономия во времени получается при пользовании указанной формулой и приведенными далее приемами.

Надо ли при этом принимать в расчет то, что 1918 год — год введения у нас нового стиля — был на 13 дней короче нормального? Нет, вводить эту поправку было бы неправильно: она не имеет отношения к исчислению продолжительности жизни. В самом деле: я родился ранее 1918 года, 22 ноября. Каждый 22 ноября возраст мой увеличивается на 365 или на 366 дней. Но после 1918 года я причисляю по 365 (366) дней уже не каждое 22 ноября, а каждое 5 декабря.

Таким образом, требуемая поправка сделана и вводить ее вторично, как требуют некоторые читатели, было бы ошибкой.

Прием для вычисления числа *минут* читатель, после сказанного в следующей задаче, не затруднится найти самостоятельно.

## 54. «СКОЛЬКО МНЕ СЕКУНД?»

Если возраст спрашивающего выражается четным числом, не большим 26, то на этот вопрос также можно довольно быстро ответить, пользуясь следующим приемом: половину числа лет умножают на 63; затем ту же половину множат на 72, ре-



Рис. 51. Сколько мне секунд?

зультат ставят рядом с первым и приписывают три ноля. Если, например, число лет 24, то для определения числа секунд поступают так:

$$63 \times 12 = 756; 72 \times 12 = 864.$$

Результат: 756 864 000.

Как и в предыдущем примере, здесь не приняты в расчет високосные годы — ошибка, которую никто не поставит вычислителю в упрек, когда приходится иметь дело с сотнями миллионов (к тому



же ее можно исправить, прибавив число секунд, заключающихся в количестве дней, равном четвертой части числа лет).

На чем же основан указанный здесь пример?

Правильность нашей формулы выясняется очень просто. Чтобы определить число секунд, заключающихся в данном числе лет, нужно лета (в нашем примере 24) умножить на число секунд в году, т. е. на

$$365 \times 24 \times 60 \times 60 = 31\,536\,000.$$

Мы делаем то же самое, но только большой множитель 31 536 разбиваем на две части (приписка нолей сама собой понятна). Вместо того чтобы умножить 24 на 31 536, умножают 24 на 31 500 и на 36; но и эти действия мы для удобства вычислений заменяем другими, как видно из следующей схемы:

$$24 \times 31\,536 = \begin{cases} 24 \times 31\,500 = 12 \times 63\,000 = 756\,000 \\ 24 \times 36 = 12 \times 72 = 864 \end{cases}$$


---

756 864

Остается лишь приписать три ноля, и мы имеем искомый результат: 756 864 000.

## 55. ПРИМЕРЫ УСКОРЕННОГО УМНОЖЕНИЯ

Мы упоминали раньше, что для выполнения тех отдельных действий умножения, на которые распадается каждый из указанных выше приемов, существуют также удобные способы. Некоторые из них весьма несложны и удобоприменимы; они настолько облегчают вычисления, что не мешает вообще запомнить их, чтобы пользоваться при обычных расчетах.

Таков, например, прием перекрестного умножения, весьма удобный при действии с двузначными числами. Способ не нов; он восходит к грекам и индусам и в старину назывался «способом молнии», или «умножением крестиком». Теперь он забыт, и о нем не мешает напомнить<sup>1</sup>.

Пусть требуется перемножить  $24 \times 32$ . Мысленно располагаем число по следующей схеме, одно под другим:

$$\begin{array}{r} 2 \\ | \\ 3 \end{array} \quad \times \quad \begin{array}{r} 4 \\ | \\ 2 \end{array}$$

Теперь последовательно производим следующие действия:

1)  $4 \times 2 = 8$  — это последняя цифра результата.

2)  $2 \times 2 = 4$ ;  $4 \times 3 = 12$ ;  $4 + 12 = 16$ ; 6 — предпоследняя цифра результата; 1 запоминаем.

3)  $2 \times 3 = 6$ , да еще удержанная в уме единица, имеем 7 — это первая цифра результата.

Получаем все цифры произведения: 7, 6, 8 — 768.

После непродолжительного упражнения прием этот усваивается очень легко.

Другой способ, состоящий в употреблении так называемых «дополнений», удобно применяется в тех случаях, когда перемножаемые числа близки к 100.

Предположим, что требуется перемножить  $92 \times 96$ . «Дополнение» для 92 до 100 будет 8, для 96 — 4. Действие производят по следующей схеме:

множители: 92 и 96  
«дополнения»: 8 и 4.

---

<sup>1</sup> Впрочем, в последние годы способ этот снова стал входить в употребление. В Америке выдающиеся педагоги высказывались за введение его в школе взамен нынешнего довольно медленного способа.

Первые две цифры результата получаются простым вычитанием из множителя «дополнения» множимого или наоборот; т. е. из 92 вычитают 4 или из 96 вычитают 8. В том и другом случае имеем 88; к этому числу приписывают произведение «дополнений»:  $8 \times 4 = 32$ . Получаем результат 8832.

Что полученный результат должен быть верен, наглядно видно из следующих преобразований:

$$92 \times 96 = \begin{cases} 88 \times 96 = 88 (100 - 4) = 88 \times 100 - 88 \times 4 \\ 4 \times 96 = 4 (88 + 8) = 4 \times 88 + 4 \times 8 \end{cases}$$

$$\frac{92 \times 96}{\quad} = \frac{8832 + 0}{\quad}$$

Еще пример. Требуется перемножить 78 на 77:

множители: 78 и 77

«дополнения»: 22 и 23.

$$78 - 23 = 55$$

$$22 \times 23 = 506$$

$$5500 + 506 = 6006.$$

Третий пример. Перемножить  $99 \times 98$ .

множители: 99 и 98

«дополнения»: 1 и 2.

$$99 - 2 = 97$$

$$1 \times 2 = 2$$

В данном случае надо помнить, что 97 означает здесь число сотен. Поэтому складываем:

$$9700 + 2 = 9702.$$

## 56. ДЛЯ ОБИХОДНЫХ РАСЧЕТОВ

Существует огромное множество приемов ускоренного выполнения арифметических действий — приемов, предназначенных не для эстрадных выступлений, а для обиходных вычислений. Составилась бы целая книга, если задаться целью опи-

сать хотя бы только главнейшие из них; такие книги и написаны, например, имеющаяся на русском языке книга известного французского педагога Мартела «Быстрый счет» или переведенная с немецкого брошюра Нейхауза «Тайны быстрых вычислений». Ограничусь поэтому лишь несколькими примерами из числа наиболее удобоприменимых.

В практике технических и торговых вычислений нередки случаи, когда приходится *складывать* столбцы чисел, близких друг к другу по величине. Например:

$$\left. \begin{array}{l} 43 \\ 38 \\ 39 \\ 45 \\ 41 \\ 39 \\ 42 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Сложение таких чисел значительно} \\ \text{упрощается, если воспользоваться} \\ \text{следующим приемом, сущность ко-} \\ \text{торого легко понять:} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} 43 = 40 + 3 \\ 38 = 40 - 2 \\ 39 = 40 - 1 \\ 45 = 40 + 5 \\ 41 = 40 + 1 \\ 39 = 40 - 1 \\ 42 = 40 + 2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 40 \times 7 = 280 \\ 3 - 2 - 1 + 5 + 1 - 1 + 2 = 7 \\ 280 + 7 = 287. \end{array}$$

Точно так же находим сумму:

$$\left. \begin{array}{l} 752 = 750 + 2 \\ 753 = 750 + 3 \\ 746 = 750 - 4 \\ 754 = 750 + 4 \\ 745 = 750 - 5 \\ 751 = 750 + 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 750 \times 6 + 1 = 4501. \end{array}$$

Сходным образом поступают, когда находят *арифметическое среднее* чисел, близких между собой по величине. Найдем, например, среднюю из следующих цен:

руб.	коп.	
4	65	$\left. \begin{array}{l} \text{Намечаем на глаз круглую цену, близкую к средней, — в данном случае, очевидно, 4 руб. 70 коп. Записываем отклонения всех цен от средней: избытки — со знаком «+», недостатки — со знаком «-».$ Получаем: $-5 + 3 + 5 - 3 + 8 + 4 - 2 + 2 = 12.$ Деля сумму отклонений на число их, имеем: $12 : 8 = 1,5.$
4	73	
4	75	
4	67	
4	78	
4	74	
4	68	
4	72	

Отсюда искомая средняя цена:

$$4 \text{ руб. 70 коп.} + 1,5 \text{ коп.} = 4 \text{ руб. 71 } \frac{1}{2} \text{ коп.}$$

Перейдем к *умножению*. Здесь прежде всего укажем, что умножение на число 5, 25 и 125 значительно ускоряется, если иметь в виду следующее:

$$5 = 10/2; 25 = 100/4; 125 = 1000/8$$

Поэтому, например,

$$36 \times 5 = 360/2 = 180; 87 \times 5 = 870/2 = 435;$$

$$36 \times 25 = 3600/4 = 900; 87 \times 25 = 8700/4 = 2175;$$

$$36 \times 125 = 36000/8 = 4500;$$

$$87 \times 125 = 87000/8 = 10\,875$$

При умножении на 15 можно пользоваться тем, что

$$15 = 10 \times 1 \frac{1}{2}$$

Поэтому легко производить в уме вычисления вроде таких:

$$36 \times 15 = 360 \times 1 \frac{1}{2} = 360 + 180 = 540,$$

или проще:

$$36 \times 1 \frac{1}{2} \times 10 = 540;$$

$$87 \times 15 = 870 + 435 = 1305.$$

При умножении на 11 нет надобности писать 5 строк:

$$\begin{array}{r} \times 383 \\ 11 \\ \hline 383 \\ + 383 \\ \hline 4213 \end{array}$$

Достаточно лишь под умножаемым числом подписать его еще раз, отодвинув на одну цифру,

$$\begin{array}{r} + 383 \\ 383 \\ \hline 4213 \end{array} \quad \text{или} \quad \begin{array}{r} + 383 \\ 383 \\ \hline 4213 \end{array}$$

и произвести сложение.

Полезно запомнить результаты умножения первых 9 чисел на 12, 13, 14 и 15. Тогда умножение многозначных чисел на такие множители значительно ускоряется.

Пусть требуется умножить

$$\begin{array}{r} 4587 \\ \times 13 \\ \hline \end{array}$$

Поступаем так. Каждую цифру множимого умножаем в уме сразу на 13:

$$7 \times 13 = 91; \quad 1 - \text{пишем, } 9 - \text{запоминаем;}$$

$$8 \times 13 = 104; \quad 104 + 9 = 113; \quad 3 - \text{пишем, } 11 - \text{запоминаем;}$$

$$5 \times 13 = 65; \quad 65 + 11 = 76; \quad 6 - \text{пишем, } 7 - \text{запоминаем;}$$

$$4 \times 13 = 52; \quad 52 + 7 = 59.$$

Итого: 59631.

После нескольких упражнений прием этот легко усваивается. Весьма удобный прием существует для умножения двузначных чисел на 11: надо раздвинуть цифры множимого и вписать между ними их сумму:

$$43 \times 11 = 473.$$

Если же сумма цифр двузначная, то число ее десятков прибавляют к первой цифре множимого:

$$48 \times 11 = 4(12)8, \text{ т. е. } 528.$$

Укажем, наконец, кое-какие приемы ускоренного *деления*.

При делении на 5 умножают делимое и делитель на 2:

$$3471 : 5 = 6942 : 10 = 694,2.$$

При делении на 25 умножают оба числа на 4:

$$3471 : 25 = 13\ 884 : 100 = 138,84.$$

Сходным образом поступают при делении на  $1\frac{1}{2}$  (= 1,5) и на  $2\frac{1}{2}$  (= 2,5):

$$\begin{aligned} 3471 : 1\frac{1}{2} &= 6942 : 3 = 2314, \\ 3471 : 2,5 &= 13\ 884 : 10 = 1388,4. \end{aligned}$$

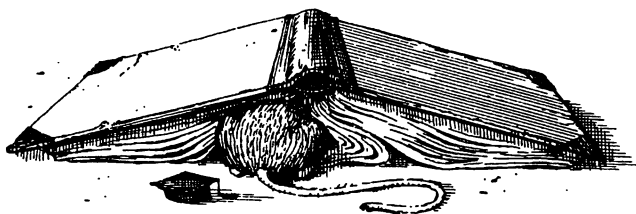


*Глава восьмая*

# Приближенные вычисления







## 57. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАГАДКИ ПИРАМИДЫ ХЕОПСА

Высочайшая пирамида Древнего Египта – пирамида Хеопса, уже пять тысячелетий обвеваемая знойным воздухом пустыни, представляет, без сомнения, самую удивительную постройку, сохранившуюся от древнего мира. Высотой почти в полтора ста метров, она покрывает своим основанием площадь в 40 тысяч квадратных метров и сложена из двухсот рядов исполинских камней. Сто тысяч рабов в течение 30 лет трудились над возведением этого сооружения – сначала подготавливая 10 лет дорогу для перевозки камней от каменоломни до места постройки, а затем громоздя их 20 лет друг на друга с помощью несовершенных машин того времени.

Было бы странно, если бы такое огромное сооружение воздвигнуто было с единственной целью – служить гробницей для правителя страны. Поэтому некоторые исследователи стали доискиваться: не раскроется ли тайна пирамиды из соотношения ее размеров?

Им, по их мнению, посчастливилось найти ряд удивительных соотношений, свидетельствующих о том, что жрецы – руководители работ по постройке – обладали глубокими познаниями по математике и астрономии и эти познания воплотили в каменных формах пирамиды.

«Геродот<sup>1</sup> рассказывает, – читаем мы в книге французского астронома Море («Загадки науки», 1926 г., т. I), – что египетские жрецы открыли ему следующее соотношение между стороной основания пирамиды и ее высотой: квадрат, построенный на высоте пирамиды, в точности равен площади каждого из боковых треугольников. Это вполне подтверждается новейшими измерениями. Вот доказательство, что во все времена пирамида Хеопса рассматривалась как памятник, пропорции которого рассчитаны математически.

Приведу более позднее доказательство: мы знаем, что отношение между длиной окружности и ее диаметром есть постоянная величина, хорошо известная современным школьникам. Чтобы вычислить длину окружности, достаточно умножить ее диаметр на 3,1416.

Математики древности знали это отношение лишь грубо приближенно.

Но вот если сложить четыре стороны основания пирамиды, мы получим для ее обвода 931,22 метра. Разделив же это число на удвоенную высоту ( $2 \times 148,208$ ), имеем в результате 3,1416, т.е. отношение длины окружности к диаметру<sup>2</sup>.

---

<sup>1</sup> Знаменитый греческий историк посетил Египет за 300 лет до нашей эры.

<sup>2</sup> Отношение длины окружности к диаметру принято обозначать греческой буквой  $\pi$  («пи»).

Значение  $\pi$  с точностью, которая получена здесь из соотношений размеров пирамиды, стало известно европейским

Этот единственный в своем роде памятник представляет собой, следовательно, материальное воплощение числа «пи», игравшего столь важную роль в истории математики. Египетские жрецы имели, как видим, точные представления по ряду вопросов, которые считаются открытиями ученых позднейших веков».

Еще удивительнее другое соотношение: если сторону основания пирамиды разделить на точную длину года — 365,2422 суток, то получается как раз 10-миллионная доля земной полуоси с точностью, которой могли бы позавидовать современные астрономы...

Далее: высота пирамиды составляет ровно миллиардную долю расстояния от Земли до Солнца — величины, которая европейской науке стала известна лишь в конце XVIII века. Египтяне 5000 лет назад знали, оказывается, то, чего не знали еще ни современники Галилея и Кеплера, ни ученые эпохи Ньютона. Неудивительно, что изыскания этого рода породили на Западе обширную литературу.

А между тем все это — не более как игра цифрами. Дело представится совсем в другом свете, если подойти к нему с оценкой результатов *приближенных* вычислений.

Рассмотрим же по порядку те примеры, которые мы привели.

1. О числе «пи». Арифметика приближенных чисел утверждает, что если в результате действия деления желаем получить число с шестью верными цифрами (3,14159), то мы должны иметь в де-

---

математикам только в XVI веке. Другие авторы из тех же измерений пирамиды выводят значение  $\pi$  с еще большей точностью: 3,14159.

лимом и делителе по крайней мере столько же верных цифр. Это значит — в применении к пирамиде, — что для получения шестизначного «пи» надо было измерить стороны основания и высоту пирамиды с точностью до миллионных долей результата, т. е. до одного миллиметра. Астроном Море приводит для высоты пирамиды значение 148,208 м на первый взгляд как будто действительно с точностью до 1 мм.

Но кто поручится за такую точность измерения пирамиды?

Вспомним, что в лабораториях Института мер (ВИМС), где производятся точнейшие в мире измерения, не могут при измерении длины превзойти такую точность (получают при измерении длины лишь 6 верных цифр). Понятно, насколько грубее может быть выполнено измерение каменной громады в пустыне. Правда, при точнейших землемерных работах (при измерении так называемых «базисов») можно и на местности достичь такой же точности, как и в лаборатории, т. е. ручаться за 6 цифр в числе. Но невозможно осуществить это в условиях измерения пирамиды. Истинных, первоначальных размеров пирамиды давно нет в натуре, так как облицовка сооружения выветрилась, и никто не знает, какой она была толщины. Чтобы быть добросовестным, надо брать размеры пирамиды в целых метрах; а тогда получается довольно грубое «пи» — не более точное, чем то, которое давно известно из математического папируса Ринда.

Если пирамида действительно есть каменное воплощение числа «пи», то воплощение это, как видим, далеко не совершенное. Но вполне допустимо, что пирамида сооружена вовсе не ради выражения именно этого соотношения. В пределы приближенных трехзначных чисел для размеров

пирамиды хорошо укладываются и другие допущения. Возможно, например, что для высоты пирамиды было взято  $\frac{2}{3}$  ребра пирамиды или  $\frac{2}{3}$  диагонали ее основания. Вполне допустимо и то соотношение, которое было указано Геродотом: что высота пирамиды есть квадратный корень из площади боковой грани. Все это — догадки, столь же вероятные, как и «гипотеза «пи».

2. Следующее утверждение касается продолжительности года и длины земного радиуса: если разделить сторону основания пирамиды на точную длину года (число из 7 цифр), то получим в точности 10-миллионную долю земной оси (число из 5 цифр). Но раз мы уже знаем, что в делимом у нас не больше трех верных цифр, то ясно, какую цену имеют здесь эти 7 и 5 знаков в делителе и в частном. Арифметика может ручаться в этом случае только за 3 цифры в длине года и земного радиуса. Год в 365 суток и земной радиус около 6400 километров — вот числа, о которых мы вправе здесь говорить.

3. Что же касается расстояния от Земли до Солнца, то здесь недоразумение иного рода. Странно даже, как приверженцы этой теории могут не замечать допускаемой ими здесь логической ошибки. Ведь если, как они утверждают, сторона пирамиды составляет известную долю земного радиуса, а высота — известную долю основания, то нельзя уже говорить, будто та же высота составляет определенную долю расстояния до Солнца. Что-нибудь одно — либо то, либо другое. А если случайно тут обнаруживается любопытное соответствие обеих длин, то оно всегда существовало в нашей планетной системе, и никакой заслуги жрецов в этом быть не может.

Сторонники рассматриваемой теории идут еще далее: они утверждают, что масса пирамиды составляет ровно одну тысячемиллиардную долю массы земного шара. Это соотношение, по их мнению, не может быть случайным и свидетельствует о том, что древнеегипетские жрецы знали не только геометрические размеры нашей планеты, но и задолго до Ньютона и Кавендиша исчислили ее массу, «взвесили» земной шар.

Здесь та же самая нелогичность, что и в примере с расстоянием от Земли до Солнца. Совершенно нелепо говорить о том, будто масса пирамиды «выбрана» в определенном соответствии с массой земного шара. Масса пирамиды определилась с того момента, как выбран был ее материал и назначены были размеры ее основания и высоты.

Нельзя одновременно сообразовать высоту пирамиды с основанием, составляющим определенную долю земного радиуса, — и *независимо* от этого ставить ее массу в связь с массой Земли. Одно определяется другим.

Значит, должны быть отвергнуты всякие домыслы о знании египтянами массы земного шара. Это не более как числовая эквилибристика.

Искусно оперируя с числами, опираясь на случайные совпадения, можно доказать, пожалуй, все что угодно.

Мы видим, на каких шатких основаниях покоится легенда о непостижимой учености жрецов-архитекторов пирамиды.

Попутно мы имеем тут и наглядную демонстрацию пользы того отдела арифметики, который занимается *приближенными* числами.

## 58. ПРИБЛИЖЕННЫЕ ЧИСЛА

Кто незнаком с правилами действий над приближенными числами, тому, вероятно, интересно будет хотя бы вкратце с ними ознакомиться — тем более что знание этих простых приемов оказывается и практически полезным, сберегая труд и время при вычислениях.

Объясним прежде всего, что такое «приближенное число» и откуда такие числа получаются.

Данные, входящие в технические расчеты, получаются путем *измерения*. Но никакое измерение не может быть выполнено совершенно точно. Прежде всего уже самые меры, которыми пользуются для измерения, обычно заключают в себе погрешность.

Изготовить совершенно точные метровые линейки, килограммовую гирию, литровую кружку чрезвычайно трудно, и закон допускает при изготовлении некоторую погрешность. Например, при изготовлении метровой линейки допускается законом погрешность до 1 миллиметра; для 10-метровой землемерной цепи или ленты — до 1 сантиметра; для килограммовой гири — до 1 грамма<sup>1</sup>; для разновески в 1 грамм — до 0,01 грамма; для литровой кружки — до 5 см<sup>3</sup>.

Кроме того, выполнение измерения также вводит неточности.

Пусть вы измеряете какое-нибудь расстояние, например ширину улицы. Мера, метр, отложились в ее ширине, допустим, 13 раз, и еще остался кусочек меньше метра. Вы можете сказать, что ширина

---

<sup>1</sup> Помимо погрешности в гирях, закон допускает погрешность и в устройстве весов, доходящую, например, в столовых весах до 1 грамма на каждый килограмм отвешиваемого груза.



улицы 13 метров; на самом деле, однако, она равна 13 целым метрам и еще некоторому числу десятых, сотых и т. д. долей метра, которых вы не учли. Следовательно, результат нашего измерения можно изобразить так:

ширина улицы = 13, ??? метра,

где вопросительные знаки означают неизвестные нам цифры десятых, сотых и т. д. долей.

Если бы вы пожелали измерить ширину улицы точнее, вы узнали бы, сколько в остающемся кусочке содержится дециметров (десятых долей метра). Допустим, что дециметров содержится 8 и еще имеется некоторый остаток, меньший дециметра. Результат нового измерения – 13,8 метра – будет точнее предыдущего, но и он не строго точен, потому что, кроме 8 десятых метра, в ширине улицы

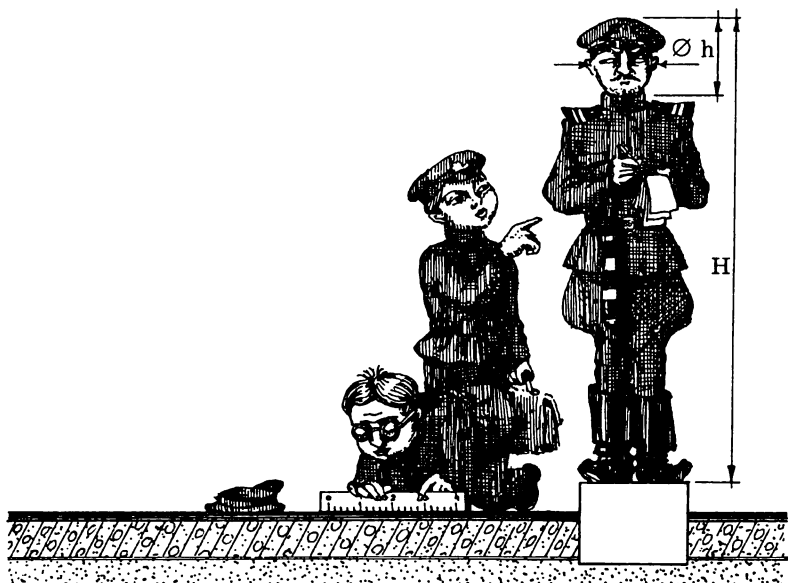


Рис. 52.

закljučается еще некоторое неизвестное нам число сотых, тысячных и т. д. долей метра. Следовательно, полученный сейчас более точный результат мы можем выразить так:

13,8?? метра.

При еще более тщательном измерении вы учтете сотые доли метра (сантиметры) в откинутом остатке, но пренебрежете остатком, меньшим сантиметра; значит, и этот результат не будет безусловно точен. Вообще, как бы аккуратно вы ни мерили, вы никогда не можете быть твердо уверены, что далее последней полученной вами цифры не найдутся еще другие, вам неизвестные.

Дело, конечно, нисколько не меняется от того, что при измерениях остатки, большие половины единицы меры, обычно считаются за целые. Если бы при первом измерении улицы мы считали ее ширину не 13 метров, а 14, — это также был бы лишь приближенный результат. Его можно было бы выразить так:

14,??? метров,

где вопросительные знаки означают *отрицательные* цифры (т. е. показывают, на сколько десятых, сотых и т. д. долей число 14 больше истинной ширины улицы).

Итак, результат даже самого тщательного измерения не может быть рассматриваем как совершенно точный: он выражает истинную величину лишь более или менее приближенно. Такие числа называются *приближенными*.

Арифметика приближенных чисел не во всем сходна с арифметикой чисел точных. Покажем это различие на примере.

Пусть требуется вычислить площадь прямоугольного участка, длина которого 68 м, а ширина

42 м. Если бы числа 68 и 42 были точные, площадь участка в точности равнялась бы

$$68 \times 42 = 2856 \text{ м}^2.$$

Но числа 68 и 42 не точные, а приближенные: в длине не ровно 68 м, а немного больше или меньше. Так как невероятно, чтобы метр укладывался в ней в точности 68 раз; да и сама длина метровой линейки едва ли в точности была равна 1 м.

Мы можем, согласно, предыдущему, выразить длину участка в метрах так:

$$68,?$$

Подобным же образом и ширину участка выразим через

$$42,?$$

Прделаем теперь умножение приближенных чисел:

$$68,? \times 42,?$$

Выполнение действия видно из следующей схемы:

$$\begin{array}{r} 68,? \\ \times 42,? \\ \hline ??? \\ 136? \\ 272? \\ \hline 285?,?? \end{array}$$

Мы видим, что четвертая цифра результата нам неизвестна; она должна получиться от сложения трех цифр ( $? + 6 + ?$ ), из которых две неизвестны.

Недостоверна также и третья цифра результата: мы записали 5, но ведь от сложения столбца  $? + 6 + ?$

могло получиться число, большее 10 и даже 20; значит, вместо 5 может оказаться и 6, и 7.

Вполне надежны только первые две цифры результата (28). Поэтому, желая быть добросовестными, мы должны утверждать лишь, что искомая площадь включает около 28 сотен квадратных метров. Каковы цифры десятков и единиц в числе квадратных метров, нам неизвестно.

Итак, правильный ответ на вопрос задачи: 2800. Причем ноли здесь означают не заведомое отсутствие единиц соответствующих разрядов, а лишь отсутствие достоверных знаний о них. Иначе говоря, ноли означают здесь то же, что и вопросительные знаки в предыдущих обозначениях.

Ошибочно думать, что ответ 2856, полученный по правилам арифметики точных чисел, вернее ответа 2800. Ничуть — ведь мы видели, что последние две цифры результата (56) доверия не заслуживают: поручиться за них нельзя. Ответ 2800 предпочтительнее, чем 2856, потому что он не вводит в заблуждение; он прямо утверждает, что *достоверны лишь цифры 2 и 8* на месте тысяч и сотен, а какие цифры идут дальше — неизвестно. Ответ же 2856 обманчив: он внушает неверную мысль, будто последние две цифры столь же надежны, как и первые две.

«Нечестно писать больше цифр, чем столько, за сколько мы можем ручаться... Мне очень грустно признаться, что немало таких чисел, ведущих к превратным представлениям, встречается в лучших сочинениях о паровых машинах... Когда я учился в школе, нам сообщали, что среднее расстояние от Земли до Солнца 95 142 357 англ. миль. Я удивляюсь, почему не было упомянуто, сколько еще футов и дюймов. Наиболее точные современные измерения позволяют лишь утверждать, что это расстояние не более 93 и не меньше 92,5 мил-

лионов миль», — писал по этому поводу английский математик Перри.

Итак, при выкладках с приближенными числами надо принимать во внимание не все цифры результата, а только некоторые. О том, какие именно цифры следует в этих случаях удерживать и какие заменять нолями, мы будем говорить особо. Остановимся сначала на том, как надо *округлять* числа.

## 59. ОКРУГЛЕНИЕ ЧИСЕЛ

Округление числа при выкладках состоит в том, что одну или несколько цифр на его конце заменяют нолями. Так как ноли, стоящие после запятой, не имеют значения, то их отбрасывают вовсе.

Например:

числа	округляют в
3734 ..... 3730	или 3700
5,314 ..... 5,31	или 5,3
0,00731 ..... 0,0073	или 0,007

Если первая из отбрасываемых при округлении цифр есть 6 или больше, то предыдущую увеличивают на единицу.

Например:

числа	округляют в
4867 ..... 4870	или 4900
5989 ..... 5990	или 6000
3,666 ..... 3,67	или 3,7

Так же поступают, если отбрасывается цифра 5 с последующими за нею значащими цифрами.

Например:

числа	округляют в
4552 ..... 4600	
38,1506 ..... 38,2.	

Но если отбрасывается *только* цифра 5, то увеличивать на единицу предшествующую цифру условились лишь тогда, когда она *нечетная*; четную же цифру – оставлять без изменения.

Например:

числа	округляют в
735 .....	740
8645 .....	8640
37,65 .....	37,6
0,0275 .....	0,028
70,5 .....	70 <sup>1</sup> .

При обработке результатов действий над приближенными числами руководствуются теми же правилами округления.

## 60. ЦИФРЫ ЗНАЧАЩИЕ И НЕЗНАЧАЩИЕ

Под *значащими* цифрами в учении о приближенных вычислениях разумеют все цифры, кроме ноля, а также и ноль в том случае, если он стоит между другими значащими цифрами. Так, в числах 3700 и 0,0062 все ноли – *незначащие* цифры; в числах же 105 и 2006 ноли – *значащие*. В числе 0,0708 первые два ноля – *незначащие*, третий же ноль – *значащая* цифра.

В некоторых случаях значащий ноль может находиться и в конце числа; округляя, например, числа 2,540002, мы получаем число 2,54000, в котором все ноли на конце – *значащие*, так как указывают на заведомое отсутствие единиц в соответствующих разрядах. Поэтому, если в условии зада-

---

<sup>1</sup> Ноль рассматривают как *четную* цифру.

чи или в таблице мы встречаем числа 4,0 или 0,80, то должны рассматривать их как двузначные. Округляя число 289,9 до 290, мы также получаем на конце значащий ноль.

## 61. СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ ПРИБЛИЖЕННЫХ ЧИСЕЛ

Результат сложения или вычитания приближенных чисел не должен оканчиваться значащими цифрами в тех разрядах, которые отсутствуют хотя бы в одном из данных чисел. Если такие цифры получились, их следует отбросить посредством округления.

Например:

$\begin{array}{r} 3400 \\ + 275 \\ \hline 3700 \end{array}$	$\begin{array}{r} 28,3 \\ + 146,85 \\ \hline 108 \\ 283 \end{array}$	$\begin{array}{r} 176,3 \\ - 0,46 \\ \hline 175,8 \end{array}$
(а не 3675),	(а не 283,15),	(а не 175,84).

Нетрудно понять основание этого правила. Пусть требуется к 3400 м прибавить 275 м. В числе 3400 измеряющий, очевидно, пренебрег десятками метров; ясно, что, прибавив к этому числу 7 десятков метров и еще 5 м, мы получим в сумме не 3675 м, а скорее всего результат с иными цифрами на месте десятков и единиц. Поэтому на месте десятков и единиц мы пишем в сумме ноли, которые в данном случае указывают, что вычислителю неизвестно, какие именно цифры должны здесь стоять.

## 62. УМНОЖЕНИЕ, ДЕЛЕНИЕ И ВОЗВЕДЕНИЕ В СТЕПЕНЬ ПРИБЛИЖЕННЫХ ЧИСЕЛ

Результат умножения, а также деления приближенных чисел не должен заключать больше значащих цифр, чем имеется их в более коротком данном. (Из двух чисел то «короче», которое содержит меньше *значащих* цифр.) Лишние цифры заменяют нолями.

Примеры:

$$\begin{array}{r} \times 37 \\ 245 \\ \hline 9100 \\ \text{(а не 9065)} \end{array} \quad \begin{array}{l} 57,8 : 3,2 = 18 \text{ (а не 18,06);} \\ 25 : 3,14 = 8,0 \text{ (а не 7,961).} \end{array}$$

При подсчете числа цифр не обращают внимания на запятую. Так, 4,57 есть число трехзначное и т. п.

Число значащих цифр степени приближенного числа не должно превышать числа их в основании степени. Излишние цифры заменяются нолями.

Примеры:

$$\begin{array}{l} 157^2 = 24\,600 \text{ (а не 24\,649);} \\ 5,81^3 = 196 \text{ (а не 196,122941).} \end{array}$$

## 63. ПРИМЕНЕНИЕ НА ПРАКТИКЕ

Правила эти относятся лишь к результатам окончательным. Если же выполняемым действием расчет еще не заканчивается, то в результате такого промежуточного действия удерживают одной значащей цифрой больше, чем требуют правила.



Выполняя, например, вычисление

$$\frac{36 \times 1,4}{3,4}$$

поступают так:

$$36 \times 1,4 = 50,4 \quad (\text{удерживают не две, а три цифры});$$
$$50,4 : 3,4 = 15.$$

При несложных технических расчетах указанные выше правила могут быть почти во всех случаях применяемы следующим упрощенным образом. Прежде чем вычислять, устанавливают по числу цифр самого короткого из данных, сколько достоверных цифр может заключать окончательный результат. Когда это установлено, приступают к выкладкам, причем во всех промежуточных выкладках удерживают одной цифрой больше, чем установлено для окончательного результата.

Если, например, в условии задачи дано несколько трехзначных чисел и одно двузначное, то окончательный результат будет иметь *две* достоверных цифры, а промежуточные результаты надо брать с *тремя* цифрами.

Итак, все правила приближенных вычислений могут быть при выполнении расчетов сведены к двум следующим:

1) устанавливают, сколько значащих цифр в самом коротком из данных задачи: *столько же* значащих цифр нужно будет удерживать в *окончательном* результате;

2) в результатах всех промежуточных вычислений удерживают *одной цифрой больше*, чем установлено для окончательного результата.

Прочие цифры во всех случаях заменять нолями или отбрасывать по правилам округления.

Правила эти неприменимы к тем задачам (встречающимся редко), для решения которых нужно производить *только* действия сложения и вычитания. В таких случаях придерживаются другого правила.

Окончательный результат не должен иметь значащих цифр в тех разрядах, которые отсутствуют хотя бы в одном из приближенных данных. В промежуточных результатах надо удерживать одной значащей цифрой больше, чем установлено для окончательного. От прочих цифр освобождаются округлением.

Если, например, данные задачи таковы:

37,5 м; 185,64 м; 0,6725 м,

и для решения требуется вычесть первое число из суммы других, то в сумме

$$\begin{array}{r} + 185,64 \\ 0,6725 \\ \hline 186,3125, \end{array}$$

как в промежуточном результате, откидывают последнюю цифру (т. е. берут 186,312), а в разности

$$\begin{array}{r} 186,312 \\ - 37,5 \\ \hline 148,812, \end{array}$$

как в результате окончательном, удерживаем лишь 148,8.

## 64. СБЕРЕЖЕНИЕ СЧЕТНОГО ТРУДА

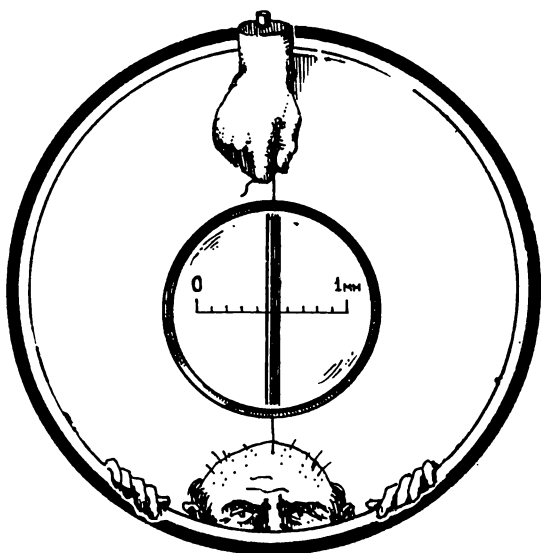
Как оценить, сколько вычислительной работы берегаем мы, пользуясь изложенными сейчас приемами? Для этого надо какой-нибудь сложный расчет выполнить двояко: один раз – по обычным арифметическим правилам, другой –

приближенно. А затем терпеливо подсчитать, сколько раз при том и другом подсчетах приходилось нам складывать, вычитать и умножать отдельные цифры. Окажется, что приближенный расчет потребует таких элементарных операций в  $2\frac{1}{2}$  раза меньше, чем «точный». Ущерба же для правильности результата в приближенном расчете нет никакого.

Итак, приближенные вычисления требуют примерно в  $2\frac{1}{2}$  раза меньше времени, нежели вычисления по обычным правилам. Но это еще не все сбережение времени, какое при этом достигается. Ведь каждая лишняя счетная операция, каждый лишний случай сложения, вычитания или умножения цифр является лишним поводом сделать ошибку.

Вероятность ошибиться при приближенных выкладках в  $2\frac{1}{2}$  раза меньше, чем при «точных». А стоит хоть раз ошибиться – и вычисление придется переделать заново, если не все целиком, то часть его.

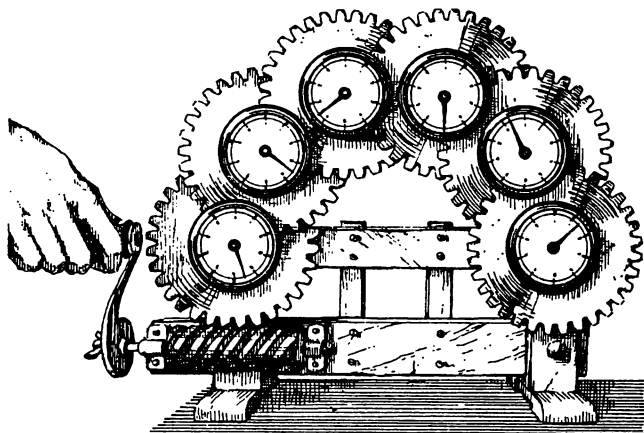
Значит, сбережение труда и времени при приближенных расчетах получается, во всяком случае, больше, чем в  $2\frac{1}{2}$  раза. Время, затраченное на ознакомление с ними, вознаграждается очень быстро и щедро.



*Глава девятая*

## Числовые великаны





## 65. КАК ВЕЛИК МИЛЛИОН?

Величественная внушительность числовых великанов — миллиона, миллиарда, даже триллиона — заметно померкла для нас в те годы, когда числа эти вместе с потоком бумажных денег проникли в нашу повседневную жизнь. Когда месячные расходы в хозяйстве небольшой семьи достигали миллиардов, а бюджет второстепенного учреждения выражался триллионами, естественна была мысль, что эти прежде недоступные воображению числа вовсе не так огромны, как твердили нам до сих пор. Трудно поражаться громадности семизначного числа рублей, за которые не давали и полной крынки молока. Не подавляет ума миллиард, на который не купишь сапог<sup>1</sup>.

Но было бы заблуждением думать, что благодаря проникновению числовых великанов со своих

---

<sup>1</sup> Речь идет о ценах 1918–1922 гг. Стоимость рубля в эти годы была очень низка. — *Примеч. ред.*

недосягаемых высот в прозу житейского обихода мы познакомились с ними лучше, чем раньше. Миллион по-прежнему остается для большинства людей тем, чем и был, — «знакомым незнакомцем». Скорее даже, наоборот, ходячее представление о миллионе сделалось еще превратнее. Мы и раньше склонны были уменьшать величину этого числа, превышающего силу нашего воображения. Когда же миллионными числами стали выражаться весьма скромные, в сущности, ценности, миллион сжался в нашем воображении до размера довольно обыкновенного, легко постигаемого числа. Мы впадали в курьезную психологическую ошибку: то, что миллион рублей сделался сравнительно небольшой суммой, мы относили не за счет уменьшения стоимости денежной единицы, а за счет уменьшения миллиона.

Я слышал, как человек, узнав впервые, что от Земли до Солнца 150 миллионов километров, просто воскликнул:

— Только всего?

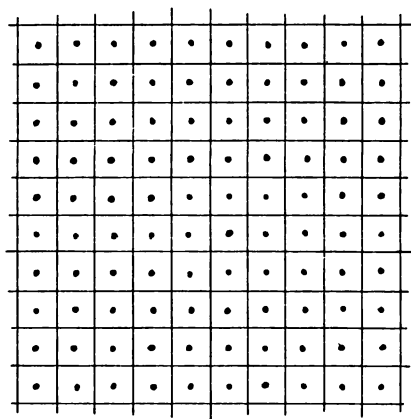
Другой, прочтя (в 1921 г.), что от Ленинграда до Москвы миллион шагов, заметил:

— Только *один* миллион шагов до Москвы? А мы платим за билет двести миллионов!..

Для тех, кто не отдает себе достаточно ясного отчета в огромности миллиона и миллиарда, остаются не вполне осознанными гигантские величины, выражающиеся миллионными и миллиардными числами. Когда вы читаете, например, о миллиардах киловатт-часов электроэнергии или о миллионах километров, отделяющих нас от планет Солнечной системы, — какой образ всплывает в вашем уме?

Чтобы ощутить грандиозность подобных чисел, стоит затратить немного времени на «арифметическую гимнастику», развивающую способность

**Рис. 53.** Чтобы нарисовать недостающие точки, потребуется немало время...



правильно оценивать подлинные размеры больших чисел.

Начнем с *миллиона* – старейшего числового великана (наименование «миллион» впервые появилось в 1500 г. в Италии<sup>1</sup>).

Если хотите ощутить истинные размеры миллиона – попробуйте хотя бы проставить в чистой тетради *миллион точек*. Я не предлагаю вам доводить такую работу до конца (едва ли у кого на это хватит терпения); уже одно начало работы, ее медленный ход даст вам почувствовать, что такое «настоящий» миллион.

Английский натуралист А. Р. Уоллис (сподвижник знаменитого Ч. Дарвина) придавал весьма серьезное значение развитию правильного представления о миллионе. Он предлагал...

«в каждой большой школе отвести одну комнату или залу, на стенах которой можно было бы на-

<sup>1</sup> Слово *миллион* означает тысячу тысяч. В XIII в. известный итальянский путешественник Марко Поло посетил Китай. И, чтобы выразить несметные богатства этой чудесной страны, придумал слово «миллион». – *Примеч. ред.*



глядно показать, что такое миллион. Для этой цели нужно иметь 100 больших квадратных листов бумаги, в  $4\frac{1}{2}$  фута каждый, разграфленных квадратами в четверть дюйма<sup>1</sup>, оставив равное число белых промежутков между черными пятнами. Через каждые 10 пятен нужно оставлять двойной промежуток, чтобы отделить каждую сотню пятен ( $10 \times 10$ ). Таким образом, на каждом листе будет по 10 тысяч черных пятен, хорошо различимых с середины комнаты, а все сто листов будут содержать миллион пятен.

Такая зала была бы в высшей степени поучительна, особенно в стране, где о миллионах говорят очень развязно и тратят их без смущения. Между тем никто не может оценить достижений современной науки, имеющей дело с невообразимо большими или невообразимо малыми величинами, если неспособен их представить наглядно и, суммируя в целое, вообразить себе, как велико число один миллион, когда современной астрономии и физике приходится иметь дело с сотнями, тысячами и даже миллионами таких миллионов<sup>2</sup>. Во всяком случае, очень желательно, чтобы в каждом большом городе была устроена такая зала для наглядного изображения на ее стенах величины одного миллиона».

---

<sup>1</sup> Слово *фут* происходит от англ. *foot* – «ступня», слово *дюйм* – от голл. *duim* – «палец».

1 фут равен 12 дюймам, или 30,48 см; 1 дюйм – 25,4 мм. Таким образом,  $4\frac{1}{4}$  фута составляет около 1,4 м, а четверть дюйма – 6,3 мм. – *Примеч. ред.*

<sup>2</sup> Например, взаимные расстояния планет измеряются десятками и сотнями миллионов километров, расстояния звезд – миллионами миллионов километров, а число молекул в кубическом сантиметре окружающего нас воздуха – миллионами миллионов миллионов.

Не знаю, было ли желание великого натуралиста исполнено на его родине, но мне довелось самому осуществить его предложение в Ленинграде, в Центральном парке культуры и отдыха. Здесь в отдельном Павильоне занимательной науки был нанесен на потолке миллион темных кружков. Необозримое поле черных точек производило на посетителей сильное впечатление и действительно давало возможность ощутить огромность миллиона. Впечатление усиливалось сопоставлением этого множества с другим множеством, которое издавна принято считать неисчислимым, — с числом звезд, видимых на небе простым глазом. Вопреки распространенному убеждению невооруженный глаз видит на одном полушарии ночного неба всего лишь 3 1/2 тысячи звезд. Число это в 300 раз меньше миллиона. Небольшой голубой кружок на потолке упомянутого павильона, содержащий 3500 темных точек и изображавший ночное небо, наглядно подчеркивал своими скромными размерами огромность подлинного числового великана — миллиона.

Читатель, вероятно, пожелает узнать, каким же способом был нанесен на потолок миллион темных кружков. Сколько времени должны были маляры выполнять эту однообразную работу?

Павильон не скоро был бы готов, если бы поставка вручную миллиона точек на его потолке была поручена малярам. Дело было сделано гораздо проще: заказаны были обои с надлежаще расположенными крапинами, и ими оклеили потолок...

## **66. МИЛЛИОН НА ШЕСТЕРЕНКАХ**

Совершенно иначе представлена невообразимая величина миллиона в Доме занимательной науки в Ленинграде. Один из экспонатов — небольшой прибор, изображение которого вы видите на

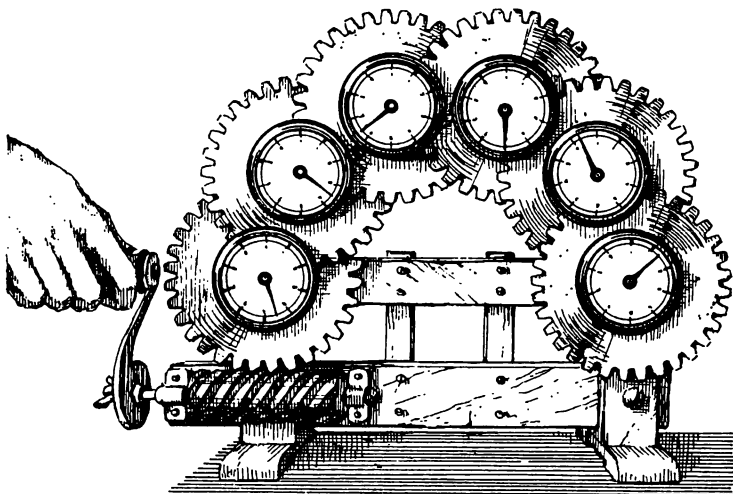
рис. 54. Ряд зубчатых колес подобран и сцеплен в этом приборе так, что, когда рукоятку поворачивают 10 раз, стрелка первого циферблата делает один оборот. Когда рукоятка повернется 100 раз, стрелка этого циферблата обойдет круг 10 раз, и одновременно стрелка соседнего, второго циферблата сделает один оборот. Чтобы заставить один раз обернуться стрелку следующего, третьего циферблата, надо сделать рукояткой прибора 1000 оборотов. После 10 000 оборотов рукоятки обернется один раз стрелка четвертого циферблата; после 100 000 – обернется пятая стрелка и, наконец, после 1 000 000 оборотов рукоятки обернется однажды последняя, шестая стрелка.

Если миллион кружков на потолке поражает зрение, то прибор с шестернями действует на мышечное чувство. Вертя рукоятку и наблюдая за тем, как медленно движутся стрелки на последних циферблатах, мы непосредственно своими руками как бы ощущаем вес тех шести нолей, которые сопровождают единицу в изображении миллиона. Ведь чтобы добраться до шестого ноля, нужно вертеть ручку прибора без отдыха и остановок сплошь в течение одиннадцати суток (считая по одному обороту в секунду)!

## 67. МИЛЛИОН СЕКУНД

Здесь я предлагаю доступный для каждого способ развить в себе более отчетливое представление о величине миллиона. Для этого нужно дать себе труд поупражняться в мысленном миллионном счете мелких, но хорошо знакомых нам единиц – шагов, минут, спичек, стаканов и т. п. Результаты получаются нередко неожиданные и поразительные.

Приведем пример.



**Рис. 54.** *Одиннадцать суток нужно крутить ручку прибора, чтобы стрелки показали миллион оборотов!*

Сколько времени отняла бы у вас работа – пересчитать миллион каких-либо предметов, по одному в каждую секунду?

Оказывается, что, считая безостановочно по 10 часов в сутки, вы закончили бы подсчет в месяце времени! Приблизительно удостовериться в этом нетрудно устным вычислением: в часе – 3600 секунд; в 10 часах – 36 000; в трое суток вы, следовательно, пересчитаете всего около 100 тысяч предметов; а так как миллион в десять раз больше, то, чтобы досчитать до него, понадобится 30 дней<sup>1</sup>. Отсюда следует, между прочим, что предложенная ранее работа – поставить в тетради миллион точек – потребовала бы много недель самого усердного и неустанного труда.

---

<sup>1</sup> Отметим для сведения, что в году (астрономическом) 31 558 150 секунд; миллион секунд в точности равен 11 суткам 13 часам 46 минутам 40 секундам.

До какой степени люди склонны недооценивать величину миллиона, показывает поучительное заблуждение самого Уоллеса: предостерегая других от преуменьшения миллиона, он заканчивает приведенный выше (см. задачу 65) отрывок таким советом:

«В маленьких размерах каждый может устроить это сам для себя: стоит только достать сотню листов толстой бумаги, разлиновать их на квадратики и поставить крупные черные точки. Подобное изображение было бы очень поучительно, хотя не в такой, конечно, степени, как осуществленное в большом масштабе».

Почтенный автор, по-видимому, полагал, что работа эта вполне под силу одному человеку!

## **68. В МИЛЛИОН РАЗ ТОЛЩЕ ВОЛОСА**

Тонкость волоса вошла чуть ли не в поговорку. Все часто видят волос и хорошо знают, насколько он тонок. Толщина человеческого волоса — около 0,07 мм. Мы округлим ее для удобства вычислений до 0,1 мм.

Представьте себе, что рядом, бок о бок, положен миллион волос. Какой ширины получилась бы полоса? Можно ли было бы, например, протянуть ее поперек двери от косяка до косяка?

Если вы никогда не задумывались над такой задачей, то можно поручиться, что, не проделав вычисления, вы дадите грубо ошибочный ответ. Вы будете, пожалуй, даже оспаривать правильный ответ, настолько покажется он неправдоподобным. Каков же он?

Оказывается, что ширина полосы из миллиона волос достигла бы примерно ста метров. Ее можно

было бы протянуть поперек самой широкой столичной улицы! Это кажется невероятным, но дайте себе труд сделать подсчет, и вы убедитесь, что так и есть:

$$\begin{aligned} 0,1 \text{ мм} \times 1\,000\,000 &= 0,1 \text{ м} \times 1000 = \\ &= 0,1 \text{ км} = 100 \text{ м}^1. \end{aligned}$$

## 69. УПРАЖНЕНИЯ С МИЛЛИОНОМ

Прodelайте – лучше всего устно – еще ряд упражнений, чтобы освоиться надлежащим образом с величиной миллиона.

### *Пример*

Величина обыкновенной комнатной мухи общеизвестна – около 7 мм в длину. Но какова была бы ее длина при увеличении в миллион раз?

### *Ответ*

Умножив 7 мм на 1 000 000, получим 7 км – примерно ширина крупного города. Значит, муха, увеличенная линейно в миллион раз, могла бы покрыть его своим телом!

### *Пример*

Увеличьте мысленно в миллион раз (по ширине) ваши карманные часы – и получите снова поражающий результат; едва ли вам удастся предугадать его без расчета. Какой?

---

<sup>1</sup> Мы проделали здесь умножение следующим путем: вместо умножения числа мы дважды заменили самую единицу меры другою, в тысячу раз большею. Этот прием очень удобен для устных подсчетов, и им следует пользоваться при выкладках с метрическими мерами.

### Ответ

Часы имели бы ширину километров 50, а каждая цифра простиралась бы на географическую милю (7 км).

### Пример

Какого роста достигал бы человек в миллион раз выше обычного роста?

### Ответ

1700 километров! Он был бы всего в 8 раз меньше поперечника земного шара. Буквально одним шагом мог бы он перемахнуть из Ленинграда в Москву, а если бы лег (рис. 55), то растянулся бы от Финского залива до Крыма...

Приведу еще несколько готовых подсчетов того же рода, предоставляя проверку их читателю.

Сделав *миллион шагов* по одному направлению, вы отошли бы километров на 600. От Москвы до Ленинграда миллион с лишком шагов.

*Миллион человек*, выстроенных в одну шеренгу плечом к плечу, растянулись бы на 250 км.



Рис. 55. Человек, увеличенный в миллион раз, может растянуться от Черного моря до Балтийского.

*Миллион точек* типографского шрифта – например, этой книги, – поставленных рядом вплотную, вытянулись бы в линию длиной в сотню метров.

Зачерпывая *миллион раз* наперстком, вы вычерпаете около тонны воды.

Книга в *миллион страниц* имела бы в толщину метров 50.

*Миллион букв* включает книга убористой печати в 600–800 страниц среднего формата.

*Миллион дней* – более 27 столетий. От начала нашей эры не прошло еще миллиона дней!

## 70. НАЗВАНИЯ ЧИСЛОВЫХ ВЕЛИКАНОВ<sup>1</sup>

Мы сейчас беседовали о миллионах. Прежде чем перейти к еще большим числовым гигантам – миллиардам, триллионам и т. д., остановимся на их названиях, принятых в нашей стране и в ряде других стран.

*Миллион* – это тысяча тысяч:

1 000 000.

Дальше идут десятки и сотни миллионов. Тысяча миллионов образует *миллиард*:

1 000 000 000.

(Иногда миллиард называют *биллионом*, однако у нас это не принято.) Итак, один миллиард равен тысяче миллионов, т. е. записывается в виде единицы с девятью нулями.

---

<sup>1</sup> Названия чисел-великанов, которые использовались во времена Я. И. Перельмана, теперь вышли из употребления. В связи с этим текст глав 9 и 10 изменен. – *Примеч. ред.*



Тысяча миллиардов образует *триллион*:

1 000 000 000 000.

Таким образом, один триллион равен миллиону миллионов и записывается в виде единицы с двенадцатью нулями.

Если вас заинтересовали наименования сверхисполинов, следующих за триллионом, вы можете обратиться к приведенной здесь табличке.

#### СПОСОБЫ ОБОЗНАЧЕНИЯ ЧИСЛОВЫХ ИСПОЛИНОВ

Название	Сколько нолей при единице	Научный способ записи
<i>миллион</i>	6	$10^6$
<i>миллиард</i>	9	$10^9$
<i>триллион</i>	12	$10^{12}$
<i>квадриллион</i>	15	$10^{15}$
<i>квинтиллион</i>	18	$10^{18}$
<i>секстиллион</i>	21	$10^{21}$
<i>септиллион</i>	24	$10^{24}$
<i>октиллион</i>	27	$10^{27}$
<i>нониллион</i>	30	$10^{30}$
<i>дециллион</i>	33	$10^{33}$
<i>ундециллион</i>	36	$10^{36}$
<i>додециллион</i>	39	$10^{39}$

В некоторых странах принят другой порядок названий чисел-гигантов, которые часто совпадают с принятыми у нас, но имеют другие значения.

Например, под словом *биллион* там понимают не тысячу, а миллион миллионов, т. е. единицу с 12 нулями; под словом *триллион* понимают единицу с 18 нулями, т. е. миллион миллионов мил-

лионов; а под словом *квадриллион* – единицу с 24 нулями, т. е. миллион миллионов миллионов миллионов; и т. д.

Короче говоря, в этих странах каждое новое высшее наименование принято присваивать *миллиону* низших, а не *тысяче* низших, как у нас.

Во избежание недоразумений поэтому следует наименование *всегда сопровождать цифрами*. Это, пожалуй, единственный случай в практике, когда обозначение суммы прописью не поясняет, а только затемняет написанное цифрами.

Заметим, что в научных книгах и на практике принят специальный способ (см. табличку) обозначения числовых великанов, который совершенно исключает всякую возможность их двойных толкований. Этот способ основан на использовании действия «возведение в степень».

Например, один *триллион* (единица с 12-ю нулями) записывается так:

$$1\ 000\ 000\ 000\ 000 = 1 \times 10^{12} = 10^{12}$$

Другой пример – двадцать семь *квадриллионов*:

$$27\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000 = 27 \times 10^{15},$$

потому что 1 квадриллион – это единица с 15 нулями (см. приведенную выше табличку).

При таком способе обозначений очень больших чисел (которые часто встречаются, например, в физике и астрономии) не только бережется место, но и, кроме того, гораздо легче прочитать эти числа и производить над ними различные действия<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup> Об этом подробнее см. в книге: Я. И. Перельман «Занимательная алгебра».

## 71. МИЛЛИАРД

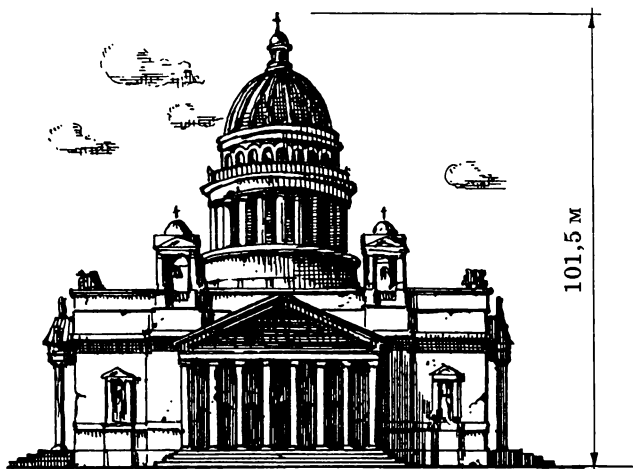
*Миллиард* – самое молодое из названий чисел. Оно вошло в употребление лишь со времени окончания франко-прусской войны (1871 г.), когда французам пришлось уплатить Германии контрибуцию в 5 000 000 000 франков. Как и «миллион», слово «миллиард» происходит от корня – «милле» (тысяча) и представляет собою итальянское увеличительное от этого существительного.

Слово «миллиард» употребляется у нас в смысле «тысяча миллионов» и при денежных вычислениях, и в точных науках. Но, например, в Германии и в Америке под миллиардом иногда разумеют не *тысячу*, а всего *сто* миллионов. Этим, между прочим, можно объяснить то, что слово «миллиардер» было в ходу за океаном еще тогда, когда ни один из американских богачей не имел состояния в тысячу миллионов. Огромное состояние Рокфеллера незадолго до войны исчислялось «всего» в 900 миллионов долларов, а остальных «миллиардеров» – меньшими числами. Только во время Первой мировой войны появились в Америке миллиардеры в нашем смысле слова.

Чтобы составить себе представление об огромности миллиарда, подумайте о том, что в книжке, которую вы сейчас читаете, заключается немногим более 300 000 букв. В трех таких книжках окажется один миллион букв. А миллиард букв будет заключать в себе стопка из 3 000 экземпляров этой книжки – стопка, которая, будучи аккуратно сложена, составила бы столб высотой с Исаакиевский собор<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup> Исаакиевский собор – один из замечательнейших архитектурных памятников Петербурга. Массивное здание собора высотой 101,5 м было во времена Я. И. Перельмана одним из самых высоких. – *Примеч. ред.*



**Рис. 56.** *Исаакиевский собор в Петербурге.*

В одном кубометре содержится кубических миллиметров ровно миллиард ( $1000 \times 1000 \times 1000$ ). Попробуем подсчитать, какой высоты получился бы столб, если бы все эти крошечные миллиметровые кубики были поставлены один на другой. Итог получается поразительный – 1000 километров!

*Миллиард минут* составляет более 19 столетий; человечество относительно недавно (29 апреля 1902 г. в 10 ч 40 мин.) начало считать второй миллиард минут от начала нашей эры.

## 72. ТРИЛЛИОН

Ощутить огромность этого числового исполина трудно даже человеку, привычному к обращению с миллионами. Великан-миллион – такой же карлик рядом с сверхвеликаном-триллионом, как единица рядом с миллионом. Об этом взаимоотношении мы обыкновенно забываем и в своем вообра-

жении не делаем большой разницы между миллионом и триллионом. Мы уподобляемся здесь тем первобытным народам, которые умеют считать только до двух или до трех, а все числа свыше их обозначают словом «много».

Подобно тому как ботокудам<sup>1</sup> кажется несущественной разница между двумя и тремя, так и многим современным культурным людям представляется несущественной разница между миллионом и триллионом. По крайней мере они не думают о том, что одно из этих чисел в миллион раз больше другого и что, значит, первое относится ко второму приблизительно так, как расстояние от Москвы до Сан-Франциско относится к ширине улицы.

Волос, увеличенный по толщине в триллион раз, был бы раз в 8 шире земного шара, а муха при таком увеличении была бы толщиной с Солнце!

Во всех книгах, которые должны были выйти в свет к концу 1932 г., насчитывается, круглым числом, около 100 *триллионов* букв. Расставленные в ряд, вплотную одна к другой, они образовали бы нить, которой можно было бы обернуть земной шар по экватору пятьсот раз!

Поднимаемся еще на одну ступень выше — рассмотрим квинтиллион. Он еще в миллион раз больше. Триллион рядом с ним — все равно что единица рядом с миллионом!

Взаимоотношение между миллионом, триллионом и квинтиллионом можно с некоторою наглядностью представить следующим образом. В Ленинграде еще не так давно было *миллион* жителей. Вообразите же себе длинный прямой ряд городов, как Ленинград, — целый миллион их: в этой цепи столиц, тянувшихся на семь миллионов километ-

---

<sup>1</sup> Ботокуды — индейское племя, жившее некогда в Бразилии, ныне практически истреблено. — *Примеч. ред.*

ров (в 20 раз дальше Луны), будет насчитываться триллион жителей... Теперь вообразите, что перед вами не один такой ряд городов, а целый миллион рядов, т. е. квадрат, каждая сторона которого состоит из миллиона «ленинградов» и который внутри сплошь уставлен «ленинградами»: в этом квадрате будет *миллион триллионов*, или *квинтиллион* жителей.

Одним *квинтиллионом* кирпичей можно было бы, размещая их плотным слоем по твердой поверхности земного шара, покрыть все материки равномерным сплошным пластом высотой почти с четырехэтажный дом. Чтобы изготовить такое число кирпичей, кирпичные заводы должны были бы, выпуская по 5 миллиардов штук в год, работать 200 миллионов лет.

Если бы все видимые в сильнейшие телескопы звезды обоих небесных полушарий — т. е. примерно 500 миллионов звезд — были обитаемые и населены каждая, как наша Земля, то на всех этих звездах, вместе взятых, насчитывался бы «только» *один квинтиллион* людей.

Последнюю иллюстрацию заимствуем из мира мельчайших частиц, составляющих все тела природы, — из мира молекул. Молекула по ширине меньше точки типографского шрифта этой книги примерно в миллион раз. Вообразите же квинтиллион таких молекул, нанизанных вплотную на одну нитку. Какой длины была бы эта нить? Ею можно было бы *семь раз* обмотать земной шар по экватору!

В каждом кубическом сантиметре воздуха (т. е. примерно в наперстке) насчитывается — отметим, кстати — от 20 до 30 *квинтиллионов* молекул. Как велико это число, видно, между прочим, из того, что, достигнув с помощью совершеннейших воздушных насосов самой крайней степени разрежения — в сто миллиардов раз, — мы все-таки будем

еще иметь в каждом кубическом сантиметре до 270 миллионов молекул!

Не знаешь, чему изумляться больше: огромной численности молекул или их невообразимой малости...

## 73. ЧИСЛА-СВЕРХГИГАНТЫ

В старинной (XVII в.) «Арифметике» Магницкого, о которой мы не раз уже упоминали, приводится таблица названий классов чисел, доведенная до квадриллиона<sup>1</sup>, т. е. до единицы с 24 нолями.

Это было большим шагом вперед по сравнению с более древним числовым инвентарем наших предков. Древняя славянская лестница больших чисел была до XV века гораздо скромнее и достигала только ста миллионов. Вот эта старинная нумерация:

«тысяща»	..... 1 000
«тьма»	..... 10 000
«легион»	..... 100 000
«леодр»	..... 1 000 000
«вран»	..... 10 000 000
«колода»	..... 100 000 000

Магницкий широко раздвинул в своей табличке древние пределы больших чисел. Но он считал практически бесполезным доводить систему наи-

---

<sup>1</sup> Магницкий придерживался той классификации чисел, которая дает новое название каждому миллиону низших единиц. Например, биллионом назывался миллион миллионов, т. е. единица с 6 нолями, и т. д. Единица с 24 нолями называлась квадриллионом.

В нашей системе наименований (о которой мы говорили выше, в задаче 70 «Названия числовых великанов») единица с 24 нолями называется *септиллионом*. В дальнейшем всюду мы будем использовать приведенную в задаче 70 систему наименований – *Примеч ред.*

менований числовых великанов чересчур далеко. Вслед за своей таблицей он помещает такие стихи:

Число есть бесконечно,  
умомъ намъ не дотечно.  
Нестъ бо намъ то пределно,  
темъ же есть и безделно  
Множайшихъ чиселъ искати,  
и больше сей писати  
Превосходной таблицы,  
умовъ нашихъ границы.  
И аще кому треба,  
счисляти что внутри неба,  
Довлеетъ числа его  
к вещемъ всемъ мира сего.

Старинный математик хотел сказать этими стихами, что так как ум человеческий не может объять бесконечного ряда чисел, то бесцельно составлять числа больше тех, которые представлены в его таблице, «умовъ нашихъ границы». Заключающиеся в ней числа — от единицы до септиллиона, т. е. до  $10^{24}$ , включительно — достаточны, по его мнению, для исчисления всех вещей видимого мира, — для каждого «кому треба счисляти что внутри неба».

Любопытно, что еще и в наши дни сейчас упомянутая таблица Магницкого почти достаточна для тех исследователей природы, которым «треба счисляти что внутри неба». При измерении расстояний до отдаленнейших светил, едва улавливаемых фотоаппаратом с помощью сильнейшего телескопа, астрономам не приходится обращаться к наименованиям свыше миллиона. Самое отдаленное из известных нам небесных тел отстоит от Земли больше чем на миллиард световых лет<sup>1</sup>. Если бы мы пожелали даже выразить это расстояние в сан-

---

<sup>1</sup> Сейчас известны гораздо более отдаленные от Земли небесные тела. — *Примеч. ред.*



тиметрах, то получили бы около 10 000 септиллионов: значит, мы и тогда не вышли бы еще из пределов таблицы Магницкого.

Обращаясь в другую сторону, к миру весьма малых величин, мы и здесь не ощущаем пока надобности пользоваться числами свыше септиллионов. Число молекул в кубическом сантиметре газа — одно из самых больших множеств, реально исчисленных, — выражается десятками квинтиллионов. Если бы мы вздумали подсчитать, сколько капель в океане (приравнивая объем капли  $1 \text{ мм}^3$ , — что весьма немного), нам и тогда не пришлось бы обратиться к наименованиям выше септиллиона, потому что число это исчисляется только тысячами септиллионов.

И лишь при желании выразить, сколько граммов вещества заключает *вся наша Солнечная система*, понадобились бы наименования выше септиллиона, так как в числе этом 34 цифры: 2 и 33 ноля, или  $2 \cdot 10^{33}$ .

## 74. ПОЖИРАТЕЛИ ЧИСЛОВЫХ ИСПОЛИНОВ

В заключение остановимся на арифметическом (вернее, пожалуй, геометрическом) великане особого рода — на кубической миле; мы имеем в виду *географическую* милю, составляющую 15-ю долю экваториального градуса и заключающую 7420 метров.

С кубическими мерами воображение наше справляется довольно слабо; мы обычно значительно преуменьшаем их величину — особенно для крупных единиц, с которыми приходится иметь дело в астрономии. Но если мы превратно представляем себе уже кубическую милю — самую боль-

шую из наших объемных мер, — то как ошибочны должны быть наши представления об объеме земного шара, других планет, Солнца!

Стоит поэтому уделить немного времени и внимания, чтобы постараться приобрести более соответствующее представление о кубической миле.

В дальнейшем воспользуемся картинным изложением из одной полузабытой книжечки — «Фантастическое путешествие через Вселенную» (появившейся примерно в середине XIX столетия).

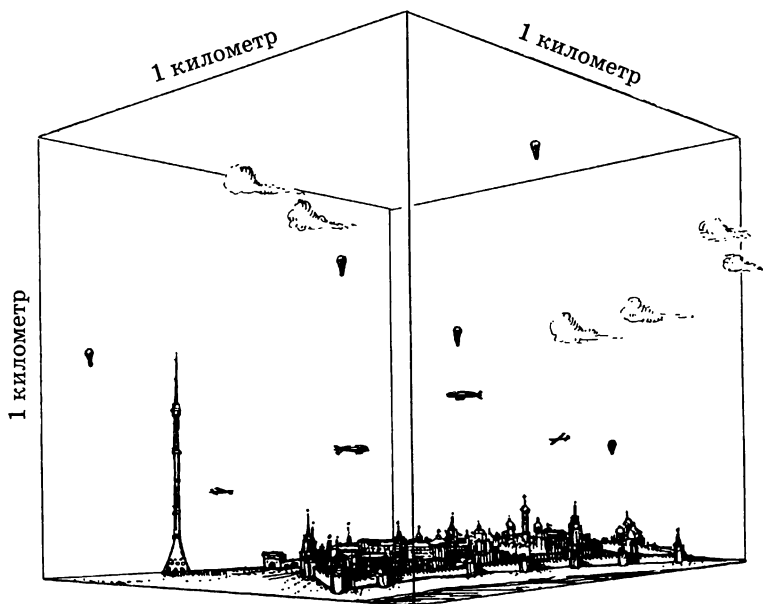
«Положим, что по прямому шоссе мы можем видеть на целую милю ( $7\frac{1}{2}$  км) вперед. Сделаем мачту длиною в милю и поставим ее на одном конце дороги, у верстового столба. Теперь взглянем вверх и посмотрим, как высока наша мачта. Положим, что возле этой мачты стоит одинаковой с ней высоты человеческая статуя — статуя более семи километров высоты. В такой статуе колено будет находиться на высоте 1 800 метров; нужно было бы взгромоздить одну на другую 25 египетских пирамид, чтобы достигнуть до пояса статуи!

Вообразим теперь, что мы поставили две таких мачты вышиною в милю на расстоянии мили одну от другой и соединили обе мачты досками; получилась бы стена в милю длины и милю вышины. Это — квадратная миля.

Мы имеем деревянную стену, стоящую отвесно. Представим себе четыре подобных стены, сколоченные вместе, как ящик. Сверху прикроем его крышкой в милю длины и милю ширины. Ящик этот займет объем кубической мили. Посмотрим теперь, как он велик, т. е. что и сколько в нем может поместиться.

Начнем с того, что, сняв крышку, бросим в ящик все здания Петербурга. Они займут там очень немного места. Отправимся в Москву и по

дороге захватим все крупные и мелкие города. Но так как все это покрыло только дно ящика, то для заполнения его поищем материалов в другом месте. Возьмем Париж со всеми его триумфальными воротами и Эйфелевой башней и бросим туда же. Всё это летит, как в пропасть; прибавка едва заметна. Прибавим Лондон, Вену, Берлин. Но так как всего этого мало, чтобы хоть сколько-нибудь заполнить пустоту в ящике, то станем бросать туда без разбора все города, крепости, замки, деревни, отдельные здания. Все-таки мало! Бросим туда все, что только сделано руками человека в Европе; но и с этим ящик едва наполняется до одной четверти. Прибавим все корабли мира; и это мало по-



**Рис. 57.** Кубический километр так велик, что по сравнению с ним многие числовые великаны становятся карликами.

могает. Бросим в ящик все египетские пирамиды, все рельсы Старого и Нового Света, все машины и фабрики мира – всё, что сделано людьми в Азии, Африке, Америке, Австралии. Ящик заполняется едва до половины. Встряхнем его, чтобы в нем улеглось ровнее, и попробуем, нельзя ли дополнить его людьми.

Соберем всю солому и всю хлопчатую бумагу, существующую в мире, и расстелем ее в ящике, – мы получим слой, предохраняющий людей от ушибов, сопряженных с выполнением подобного опыта. Все население Германии уляжется в первом слое. Покроем его мягким слоем в фут толщиной и уложим еще столько же. Покроем и этот слой и, кладя далее слой на слой, поместим в ящике все население Европы, Азии, Африки, Америки, Австралии... Все это заняло не более 50 слоев, т.е., считая слой толщиной в метр, – всего 50 метров. Понадобилось бы в десятки раз больше людей, чем их существует на свете, чтобы наполнить вторую половину ящика...

Что же нам делать? Если бы мы пожелали поместить в ящике весь живой мир – всех лошадей, быков, ослов, мулов, баранов, верблюдов, на них наложить всех птиц, рыб, змей – все, что летает и ползает, – то и тогда не наполнили бы ящика доверху без помощи скал и песка.

Такова кубическая миля. А из земного шара можно сделать 660 миллионов подобных ящиков! При всем почтении к кубической миле, к земному шару приходится питать еще большее уважение».

К сказанному прибавим еще от себя, что кубическая миля пшеничных зерен насчитывала бы их несколько квинтиллионов. Как видите, этот кубический исполин – настоящий пожиратель других исполинов.

## 75. ИСПОЛИНЫ ВРЕМЕНИ

Огромные промежутки времени представляются нами еще более смутно, чем огромные расстояния и объемы. Геология учит, что со времени отложения наиболее древних пластов земной коры протекли сотни миллионов лет.

Как ощутить неизмеримую огромность таких периодов времени?

Один ученый предлагает для этого такой способ:

«Все протяжение истории Земли представим в виде прямой линии в 500 км. Это расстояние пусть изображает те 500 миллионов лет, которые протекли от начала кембрийского периода (одна из древнейших эпох истории земной коры). Так как километр представляет длительность миллиона лет, то последние 500–1000 м изобразят длительность ледникового периода; а 6000 лет мировой истории сократятся до 6 м – длины комнаты, в масштабе которой 70 лет жизни человека представляются линией в 7 см. Если заставить улитку проползти все названное расстояние с нормальной для нее скоростью 3,1 мм в секунду, то на все расстояние ей понадобится ровно 5 лет. А все протяжение от начала мировой войны до наших дней она одолеет в 40 секунд...<sup>1</sup> Мы видим, как ничтожны в масштабе истории Земли те небольшие сроки, которые человек может объять своим умом».

---

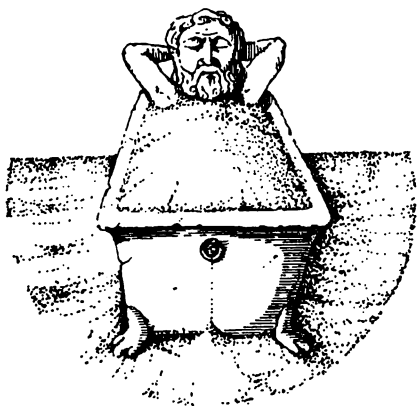
<sup>1</sup> Написано в 1927 году. – *Примеч. ред.*



*Глава десятая*

## Числовые лилипуты





## 76. ОТ ВЕЛИКАНОВ К КАРЛИКАМ

Гулливвер в своих странствованиях, покинув лилипутов, очутился среди великанов. Мы путешествуем в обратном порядке: познакомившись с числовыми исполинами, переходим к миру лилипутов — к числам, которые во столько же раз меньше единицы, во сколько единица меньше арифметического великана.

Разыскать представителей этого мира не составляет никакого труда: для этого достаточно написать ряд чисел, *обратных* миллиону, миллиарду, триллиону и т. д., т. е. делить единицу на эти числа. Получающиеся дроби

$$\begin{array}{r} 1 \\ \hline 1\,000\,000, \end{array} \quad \begin{array}{r} 1 \\ \hline 1\,000\,000\,000\,000, \end{array} \quad \begin{array}{r} 1 \\ \hline 1\,000\,000\,000 \end{array}$$

и т. д.

есть типичные числовые лилипуты, такие же пигмеи по сравнению с единицей, какой является единица по сравнению с миллионом, миллиардом, триллионом и прочими числовыми исполинами.



Вы видите, что каждому числу-исполину соответствует число-лилипут и что, следовательно, числовых лилипутов существует не меньше, чем исполинов. Для них также придуман сокращенный способ обозначения. Мы уже упоминали (см. таблицу в задаче 70), что весьма большие числа в научных сочинениях (по астрономии, физике) обозначаются так:

1 000 000	.....	$10^6$
10 000 000	.....	$10^7$
400 000 000	.....	$4 \cdot 10^8$
6 квадриллионов	.....	$6 \cdot 10^{15}$

и т. д.

Соответственно этому, числовые лилипуты обозначаются следующим образом:

$\frac{1}{1\,000\,000}$	.....	$10^{-6}$
$\frac{1}{100\,000\,000}$	.....	$10^{-8}$
$\frac{3}{1\,000\,000\,000}$	.....	$3 \cdot 10^{-9}$

и т. д.

Есть ли, однако, реальная надобность в подобных дробях?

Приходится ли когда-нибудь действительно иметь дело со столь мелкими долями единицы?

Об этом интересно побеседовать подробнее.

## 77. ЛИЛИПУТЫ ВРЕМЕНИ

Секунда по обычному представлению — настолько малый промежуток времени, что с весьма мелкими частями ее не приходится иметь дела ни при каких обстоятельствах. Легко написать:  $\frac{1}{1000}$  се-

кунды. Но это — чисто бумажная величина, потому что ничего будто бы не может произойти в такой ничтожный промежуток времени.

Так думают многие, но ошибаются, потому что в тысячную долю секунды могут успеть совершиться весьма многие явления.

Поезд, проходящий 36 километров в час, делает в секунду 10 метров и, следовательно, в течение одной 1000-й доли секунды успевает продвинуться на один сантиметр.

Звук в воздухе переносится в течение 1000-й доли секунды на 33 сантиметра, а пуля, покидающая ружейный ствол со скоростью 700–800 метров в секунду, переносится за тот же промежуток времени на 70 см.

Земной шар перемещается каждую 1000-ю долю секунды в своем обращении вокруг Солнца на 30 м. Струна, издающая высокий тон, делает в 1000-ю долю секунды 2–4 и более полных колебания; даже комар успевает в это время взмахнуть вверх или вниз своими крылышками. Молния длится гораздо меньше 1000-й доли секунды — в течение этого промежутка времени успевает возникнуть и прекратиться столь значительное явление природы (молния простирается в длину на целые километры).

Но, возразят, пожалуй, 1000-ю долю секунды еще нельзя признать за лилипута, как никто не назовет тысячу числовым гигантом. Вот если взять миллионную долю секунды, то уж, наверное, можно утверждать, что это — величина нереальная, промежуток времени, в течение которого ничего произойти не может.

Ошибаетесь! Даже и одна миллионная доля секунды для современного физика, например, вовсе не чрезмерно маленький промежуток. В области явлений световых (и электрических) ученому сплошь и рядом приходится иметь дело с гораздо

более мелкими частями секунды. Напомним прежде всего, что световой луч пробегает каждую секунду (в пустоте) 300 000 километров; следовательно, за 1 000 000-ю долю секунды свет успевает перенестись на расстояние 300 м – примерно на столько же, на сколько переносится в воздухе звук в течение целой секунды.

Далее: свет есть явление волновое, и число световых волн, минующих каждую секунду каждую точку пространства, исчисляется сотнями триллионов. Те световые волны, которые, действуя на наш глаз, вызывают ощущение красного света, имеют частоту колебаний 400 триллионов в секунду; это значит, что в течение одной 1 000 000-й доли секунды в наш глаз вступает 400 000 000 волн, а одна волна вступает в глаз в течение одной 400 000 000 000 000-й доли секунды.

Вот подлинный числовой лилипут!

Но этот несомненный, реально существующий лилипут является истинным великаном по сравнению с еще более мелкими долями секунды, с которыми физик встречается при изучении рентгеновских лучей. Эти удивительные лучи, обладающие свойством проникать через многие непрозрачные тела, представляют собою, как и видимые лучи, волновое явление, но частота колебаний у них значительно больше, чем у видимых: она достигает 2 500 триллионов в секунду! Волны следуют тут одна за другой в 60 раз чаще, чем в лучах видимого красного света.

Гамма-лучи обладают частотой еще большей, чем лучи Рентгена. Значит, и в мире лилипутов существуют свои великаны и карлики. Гулливер был выше лилипутов всего в дюжину раз и казался им великаном. Здесь же один лилипут больше другого в пять дюжин раз и, следовательно, имеет все права именоваться по отношению к нему исполином.

## 78. ЛИЛИПУТЫ ПРОСТРАНСТВА

Интересно рассмотреть теперь, какие наименьшие расстояния приходится отмеривать и оценивать современным исследователям природы.

В метрической системе мер наименьшая единица длины для обиходного употребления — *миллиметр*; он примерно вдвое меньше толщины спички. Чтобы измерить предметы, видимые простым глазом, такая единица длины достаточно мелка. Но для измерения бактерий и других мелких объектов, различимых только в сильные микроскопы, миллиметр чересчур крупен.

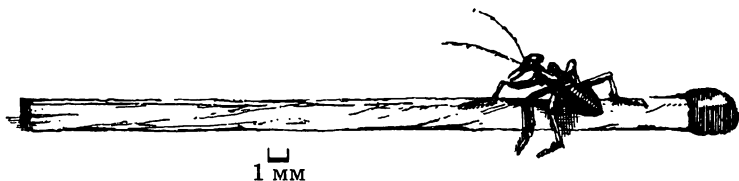


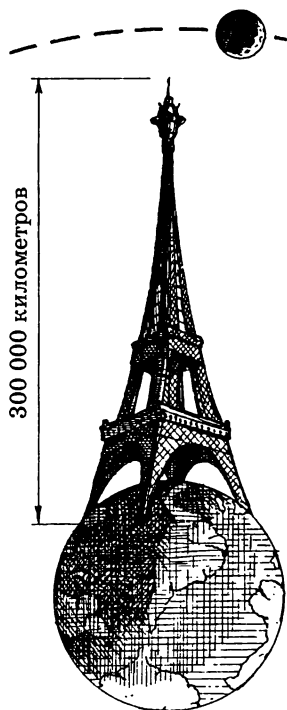
Рис. 58. Один миллиметр примерно вдвое меньше толщины спички.

Ученые обращаются для таких измерений к более мелкой единице — *микрону*<sup>1</sup>, который в 1000 раз меньше миллиметра. Так называемые красные кровяные тельца, которые насчитываются десятками миллионов в каждой капле нашей крови, имеют в длину 7 микрон и в толщину 2 микрона. Стопка из 1000 таких телец имеет толщину спички.

Как ни мелок кажется нам микрон, он все же, оказывается, чрезмерно крупен для расстояний, которые приходится измерять современному физику. Мельчайшие, не доступные даже микроскопу части-

---

<sup>1</sup> Микрон — устаревшее название единицы длины, равной  $\frac{1}{1\,000\,000}$  метра. Теперь она называется *микрометр*. — Примеч. ред.



**Рис. 59.** *Вообразите, что все предметы на Земле увеличились в миллион раз!*

цы — молекулы, из которых состоит вещество всех тел природы, и слагающие их еще более мелкие атомы имеют размеры от одной 100-й до одной 1000-й доли микрона. Если остановиться на первой, большей величине, то тогда окажется, что миллион таких крупинок (а мы уже знаем, как велик миллион), будучи расположен на одной прямой, вплотную друг к другу, занял бы всего один сантиметр!

Чтобы представить себе наглядно чрезвычайную малость атомов, обратимся к такой картине. Вообразите, что все предметы на земном шаре увеличились в миллион раз. Эйфелева башня (300 м высоты) уходила бы тогда своей верхушкой на 300 000 км в мировое пространство и находилась бы в недалеком соседстве от орбиты Луны. Люди были бы величиной в  $\frac{1}{4}$  земного радиуса — 1 700 км; один шаг такого человека-гиганта унес бы его на 600–700 км. Мельчайшие красные тельца, миллиардами плавающие в его крови, имели бы каждое более 7 м в поперечнике. Волос имел бы 100 м в толщину. Мышь достигла бы 100 км в длину, муха — 7 км.

Каких же размеров будет при таком чудовищном увеличении атом вещества? Положительно — не верится: его размеры предстанут перед вами в виде... типографской точки шрифта этой книги!

Достигаем ли мы здесь крайних пределов пространственной малости, за которые не приходится переступать даже физику с его изошренными приемами измерений?

Еще не особенно давно думали так. Но теперь известно, что атом — целый мир, состоящий из гораздо более мелких частей и являющийся ареною действия могущественных сил. Атом, например, водорода состоит из центрального «ядра» и быстро обращающегося вокруг него «электрона». Не входя в другие подробности, скажем только, что поперечник электрона измеряется триллионными долями миллиметра. Другими словами, поперечник электрона почти в миллион раз меньше поперечника атома. Если же пожелаете сравнить размеры электрона с размерами пылинки, то расчет покажет вам, что электрон меньше пылинки примерно во столько же раз, во сколько пылинка меньше — чего бы вы думали? — земного шара!

Вы видите, что атом — лилипут среди лилипутов — является в то же время настоящим исполином по сравнению с электроном, входящим в его состав, таким же исполином, каким вся Солнечная система является по отношению к земному шару.

Можно составить следующую поучительную лестницу, в которой каждая ступень является исполином по отношению к предыдущей ступени и лилипутом — по отношению к последующей:

электрон;  
атом;  
пылинка;  
дом;  
земной шар;  
Солнечная система;  
расстояние до Полярной звезды;  
Млечный Путь.

Каждый член этого ряда примерно в четверть миллиона раз<sup>1</sup> больше предыдущего и во столько же раз меньше последующего.

Ничто не доказывает так красноречиво всю относительность понятий «большой» и «малый», как эта табличка. В природе нет безусловно большого или безусловно малого предмета. Каждая вещь может быть названа и подавляюще-огромной и исчезающе-малой – в зависимости от того, как на нее взглянуть, с чем ее сравнить.

## 79. СВЕРХИСПОЛИН И СВЕРХЛИЛИПУТ

Наши беседы о великанах и карликах из мира чисел были бы неполны, если бы мы не рассказали читателю об одной изумительной диковинке этого рода – диковинке, правда, не новой, но стоящей дюжины новинок. Чтобы подойти к ней, начнем со следующей, на вид весьма замысловатой задачи.

Какое самое большое число можно написать тремя цифрами, не употребляя никаких знаков действий?

Хочется ответить: 999, – но, вероятно, вы уже подозреваете, что ответ иной; иначе задача была бы чересчур проста. И, действительно, правильный ответ пишется так:

$$9^{9^9}$$

Выражение это означает: «девять в степени девять в девятой степени». Другими словами: нужно составить произведение из стольких девяток, сколько единиц в результате умножения:

$$9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9.$$

---

<sup>1</sup> Имеются в виду линейные размеры (а не объемы), т. е. поперечник атома, диаметр Солнечной системы, высота или длина дома и т. п. Подробнее о такого рода сопоставлениях см. мою книгу «Знаете ли вы физику?»

Достаточно только начать вычисление, чтобы ощутить огромность ожидаемого результата. Если у вас хватит терпения выполнить перемножение девяти девяток, вы получите число:

387 420 489.

Главная работа только начинается: теперь нужно найти

$9^{387\,420\,489}$ .

т. е. произведение 387 420 489 девяток. Придется сделать круглым счетом 400 миллионов умножений...

У вас, конечно, не будет времени довести до конца подобное вычисление. Но я лишен возможности сообщить вам готовый результат — по трем причинам, которые нельзя не признать уважительными.

Во-первых, число это никогда и никем еще не было вычислено (известен только приближенный результат). Во-вторых, если бы даже оно и было вычислено, то, чтобы напечатать его, понадобилось бы не менее тысячи таких книг, как эта, потому что число наше состоит из 369 693 061 цифры: набранное обыкновенным шрифтом, оно имело бы в длину 1000 км — от Ленинграда до Нижнего Новгорода. Наконец, если бы меня снабдили достаточным количеством бумаги и чернил, я и тогда не смог бы удовлетворить вашего любопытства. Вы легко можете сообразить — почему: если я способен писать, скажем, без перерыва по две цифры в секунду, то в час я напишу 7200 цифр, а в сутки, работая непрерывно день и ночь, не более 172 800 цифр. Отсюда следует, что, не отрываясь ни на секунду от пера, трудясь круглые сутки изо дня в день без отдыха, я просидел бы за работой не менее 7 лет, прежде чем написал бы это число...

Могу сообщить вам об этом числе только следующее: оно начинается цифрами 428 124 773 175



747 048 036 987 118 и кончается 89. Что находится между этим началом и концом — неизвестно. А ведь там 369 693 061 цифра!..

Вы видите, что уже *число цифр* нашего результата невообразимо огромно. Как же велико само число, выражаемое этим длиннейшим рядом цифр?

Трудно дать хотя бы приблизительное представление о его громадности, потому что такого множества вещей, считая даже каждый электрон за отдельную вещь, — нет в целой Вселенной!

Архимед некогда вычислил, сколько песчинок заключал бы в себе мир, если бы весь он, до неподвижных звезд, наполнен был тончайшим песком. У него получился результат, не превышающий единицы с 63 нолями. Наше число состоит не из 64, а из 370 миллионов цифр, следовательно, оно неизмеримо превышает огромное число Архимеда.

Познакомившись с этим замаскированным гигантом,

$$9^9,$$

обратимся к его противоположности. Соответствующий числовой лилипут получится, если разделим единицу на это число. Будем иметь:

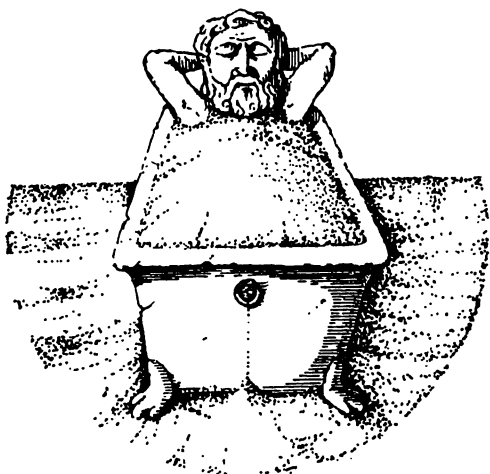
$$\frac{1}{9^9}.$$

Это равно

$$\frac{1}{9^{387\,420\,489}}.$$

Мы имеем здесь *знакомое* нам огромное число в знаменателе. *Сверхвеликан* превращен нами в *сверхлилипута*.

Необходимо сделать существенное замечание о великане из трех девяток. Я получил немало



**Рис. 60.** *Архимед вычислил, сколько песчинок заключал бы в себе мир, если бы весь он наполнен был тончайшим песком.*

писем от читателей с утверждением, что выражение это вовсе не так трудно вычислить; ряд читателей даже выполнил требуемый расчет, употребив на него сравнительно немного времени. Результат оказался несравненно скромнее того, о котором у меня рассказано. В самом деле, — пишут они, —

$$9^9=387\,420\,489;$$

возвысив же 387 420 489 в 9-ю степень, получаем число «всего лишь» из 72-х цифр. Это хотя и не мало, но до 370 миллионов цифр от него еще очень далеко...

Читатели недоумевают, а между тем ошибка их в том, что ими неправильно понят смысл трехъярусного выражения из девяток. Они понимают его так:

$$(9^9)^9,$$

в то время как правильное его понимание иное:

$$9^{(9^9)}.$$

Отсюда — огромная разница в итогах вычисления. Оба способа понимания приводят к одинаковому результату только в одном случае: когда мы имеем выражение

$$2^{2^2}.$$

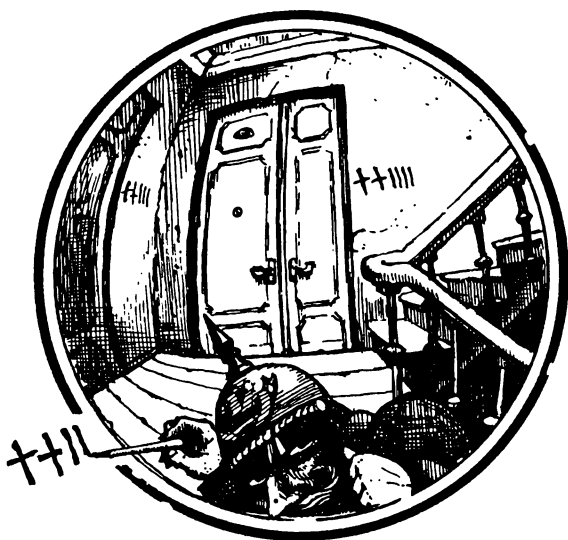
Тут безразлично, как вести вычисление: в обоих случаях получается один результат — 16.

Любопытно, что сейчас приведенное выражение вовсе не означает самого большого числа, какое можно изобразить тремя двойками. Можно получить гораздо большее число, если расположить двойки так:

$$2^{2^2}.$$

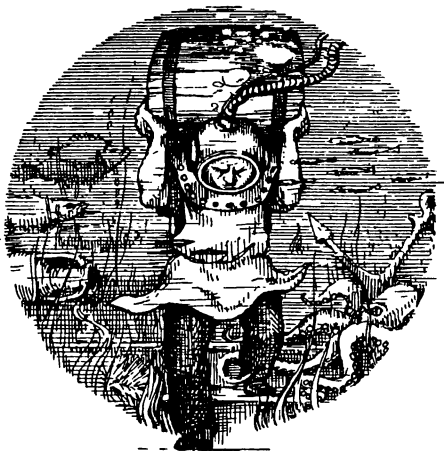
Что составляет 4 194 304, т. е. значительно больше шестнадцати.

Как видите, третья «трехэтажная» степень не во всех случаях выражает наибольшее число, какое можно изобразить тремя одинаковыми цифрами. (Подробнее об этом говорится в «Занимательной алгебре», в главе «Пятое математическое действие».)



*Глава одиннадцатая*  
Арифметические  
путешествия





## 80. ВАШЕ КРУГОСВЕТНОЕ ПУТЕШЕСТВИЕ

В молодости я работал в редакции одного пространенного ленинградского журнала, где состоял секретарем. Однажды мне подали визитную карточку посетителя. Я прочел на ней незнакомую фамилию и весьма необычное обозначение профессии: «Первый русский кругосветный путешественник пешком». По обязанностям службы мне не раз доводилось беседовать с путешественниками по всем частям света и даже с кругосветными, но о «кругосветном путешественнике пешком» я еще не слышал. С любопытством поспешил я в приемную, чтобы познакомиться с этим неутомимым человеком.

Замечательный путешественник был молод и имел очень скромный вид. На вопрос, когда успел он совершить свое необыкновенное путешествие, «первый русский кругосветный и т. д.» объяснил мне, что оно именно теперь и совершается. Марш-

рут? Шувалово – Ленинград<sup>1</sup>; о дальнейшем он желает посоветоваться со мною... Из разговора выяснилось, что планы «первого русского и т. д.» довольно смутны, но, во всяком случае, не предусматривают оставления пределов России.

– Как же в таком случае совершите вы кругосветное путешествие? – с изумлением спросил я.

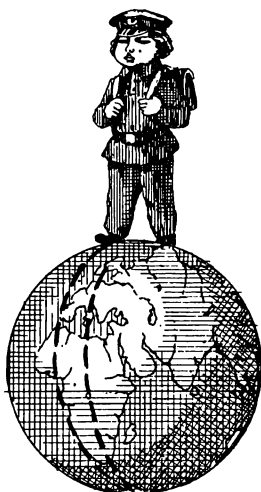


Рис. 61.

– Главное дело длину земного обхвата пройти, это можно и в России сделать, – разрешил он мое недоумение. – Десять километров уже пройдено, и остается...

– Всего 39 990. Счастливого пути!

Не знаю, как странствовал «первый и т. д.» на протяжении остальной части своего пути. Но что он успешно выполнил свое намерение, я нисколько не сомневаюсь. Даже если он больше вовсе не странствовал, а сразу возвратился в родное Шувалово и безвыездно проживал там, он и в таком случае прошел не менее 40 тысяч километров. Беда только, что он не первый и не единственный человек, совершивший такой подвиг. И вы, и я, и большинство других граждан нашей страны имеют столько же прав называться «кругосветным путешественником пешком» в понимании шуваловского ходока. Потому что каждый из нас, какой бы он ни был домосед, успел в течение своей жизни, сам того не подозревая, пройти пешком путь, даже более длинный, чем ок-

---

<sup>1</sup> Шувалово – небольшая станция в десятке километров от Ленинграда. (Ныне Санкт-Петербурга. – *Примеч. ред.*)

ружность земного шара. Маленький арифметический подсчет убедит вас в этом.

В течение каждого дня вы, конечно, не менее 5 часов проводите на ногах: ходите по комнатам, по двору, по улице, — словом, так или иначе шагаете. Если бы у вас в кармане был шагомер (прибор для подсчета сделанных шагов), он показал бы вам, что вы ежедневно делаете не менее 30 000 шагов. Но и без шагомера ясно, что расстояние, проходимое вами в день, очень внушительно. При самой медленной ходьбе человек де-

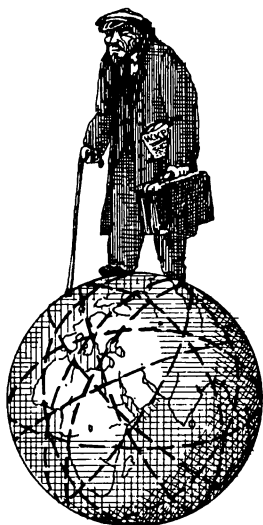


Рис. 62.

лает в час 4–5 км. Это составляет в день за 5 часов 20–25 км. Теперь остается умножить дневной переход на 360, и мы узнаем, какой путь каждый из нас проходит в течение целого года:

$$20 \times 360 = 7200 \text{ или же } 25 \times 360 = 9000.$$

Итак, даже малоподвижный человек, никогда не покидавший родного города, проходит ежегодно пешком около 8 000 км. А так как окружность земного шара имеет 40 000 км, то нетрудно вычислить, во сколько лет совершаем мы пешеходное путешествие, равное кругосветному:

$$40000 : 8000 = 5.$$

Значит, в течение 5 лет вы проходите путь, по длине равный окружности земного шара. Каждый 13-летний мальчик, если считать, что он начал ходить с двухлетнего возраста, дважды совершил уже «кругосветное путешествие». Каждый 25-летний человек выполнил не менее 4 таких путешест-



вий. А дожив до 60 лет, мы *десять* раз обойдем вокруг *земного шара*, т. е. пройдем путь более длинный, чем от Земли до Луны (380 000 км).

Таков неожиданный результат подсчета столь обыденного явления, как ежедневная наша ходьба по комнате и вне дома.

## 81. ВАШЕ ВОСХОЖДЕНИЕ НА МОНБЛАН

Вот еще один интересный подсчет. Если вы спросите почтальона, ежедневно разносящего письма по адресам, или квартирного врача, целый день занятого посещениями пациентов, совершали ли они восхождение на Монблан, они, конечно, удивятся такому вопросу. Между тем вы легко можете доказать каждому из них, что, не будучи альпинистами, они, наверное, совершили уже восхождение на высоту, даже превышающую величайшую вершину Альп.

Стоит только подсчитать, на сколько ступеней поднимается почтальон ежедневно, восходя по лестнице при разноске писем, или врач, посещая больных. Окажется, что самый скромный почтальон, самый занятой врач, никогда даже и не помышлявшие о спортивных состязаниях, побивают мировые рекорды горных восхождений. Подсчитаем это.

Возьмем для подсчета довольно скромные средние цифры; допустим, что почтальон ежедневно посещает только десять человек, живущих кто на втором этаже, кто – на третьем, четвертом, пятом, в среднем возьмем – на третьем. Высоту третьего этажа примем, для круглого числа, в 10 м; следовательно, наш почтальон ежедневно совершает по ступеням лестниц путешествие на высоту  $10 \times 10 = 100$  м. Высота Монблана 4800 м. Разделив ее на 100, вы узнаете, что наш скромный почтальон выполняет восхождение на Монблан в 48 дней...

Итак, каждые 48 дней (или примерно 8 раз в год) почтальон поднимается по лестнице на высоту, равную высочайшей вершине Европы. Скажите, какой спортсмен ежегодно по 8 раз взбирается на Монблан?

Для врача у меня имеются не предположительные, а реальные цифры. Врачи квартирной помощи в Ленинграде подсчитали, что в среднем каждый из них за свой рабочий день поднимается к больным на 2500 ступеней. Считая высоту ступеньки равной 15 см и принимая 300 рабочих дней в году, получаем, что за год врач поднимается на 112 км, т. е. совершает 20 раз восхождение на высоту Монблана или, если угодно, поднимается в пять раз выше полета стратостата «Осоавиахим-1».

Не надо непременно быть почтальоном или врачом, чтобы выполнять подобные подвиги, конечно, того не ведая. Я живу во втором этаже, в квартире, куда ведет лестница с 20 ступеньками – число, казалось бы, весьма скромное. Ежедневно мне приходится взбегать по этой лестнице раз 5 да еще посещать две квартиры, расположенные, скажем, на такой же высоте. В среднем можно принять, что я поднимаюсь ежедневно 7 раз по лестнице с 20 ступенями, т. е. взбегаю вверх каждый день на 140 ступеней. Сколько же это составит в течение года?

$$140 \times 360 = 50\,400.$$

Итак, ежегодно я поднимаюсь более чем на 50 000 ступеней. В 60 лет я успею подняться на вершину сказочно высокой лестницы в три миллиона ступеней (450 км)! Как изумился бы я, если бы ребенком меня подвели к основанию этой лестницы, уходящей в бесконечную даль, и сказали, что когда-нибудь я, быть может, достигну ее вершины...

На какие же исполинские высоты взбираются те люди, которые по роду своей профессии только

и делают, что поднимаются на высоту? Например, служители при лифтах?

Мы с гордостью узнаём, что среди наших ударников авиации есть такие, которые не только успели пролететь число километров, равное расстоянию от Земли до Луны, но даже перекрыли это расстояние во много раз.

Должно нас поражать и то, что существуют люди, которые по роду своей работы совершают путешествие на Луну «на своих на двоих»; подсчитано, что, например, служитель при лифте нью-йоркского небоскреба совершает подъем до высоты Луны за 15 лет службы.

## 82. НЕЗАМЕТНОЕ ПУТЕШЕСТВИЕ НА ДНО ОКЕАНА

Весьма внушительные путешествия выполняют обитатели подвальных помещений, служители таких же складов и т. п. Много раз в день, сбегая вниз по ступенькам маленькой лестницы, ведущей в подвал, они в течение нескольких месяцев проходят расстояние в целые километры. Нетрудно рассчитать, во сколько времени служитель подвального склада проходит таким образом вниз расстояние, равное глубине океана.

Если лестница углубляется, скажем, всего на 2 м и человек сбегает по ней ежедневно только 10 раз, то в месяц он пройдет вниз расстояние в

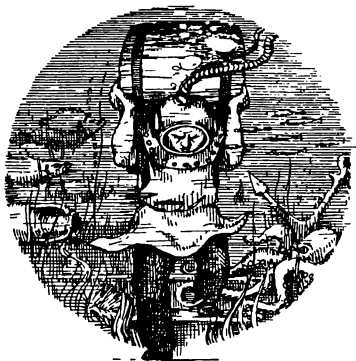
$$\begin{aligned} 30 \times 20 &= 600 \text{ м,} \\ &\text{а в год} \\ 600 \times 12 &= 7200 \text{ м,} \end{aligned}$$

т. е. более 7 км. Вспомним, что глубочайшая шахта простирается в недра Земли всего на два с небольшим километра!

Итак, если бы с поверхности океана вела на его дно лестница, то любой работник подвального тор-



**Рис. 63.** *За сколько дней почтальон поднимется на Монблан?*



**Рис. 64.** *За какое время служитель подвального склада проходит вниз расстояние, равное глубине океана?*

гового помещения достиг бы дна океана в течение одного года.

### 83. НЕУТОМИМОЕ КОЛЕСИКО

Кругосветный путешественник имеется и у многих из нас в кармане — внутри карманных часов.

Откройте заднюю крышку карманных часов и рассмотрите механизм. Все зубчатые его колеса так медленно вертятся, что с первого взгляда кажутся даже и вовсе неподвижными. Надо долго и внимательно следить за колесиками, чтобы заметить их движение. Исключение составляет только крошечный маховик — так называемый балансир, — который без усталости качается взад и вперед. Движения его так проворны, что трудно сосчитать, сколько качаний успевает он сделать в одну секунду. Пять раз поворачивается он в течение каждой секунды то в одну, то в другую сторону попеременно.

При этом колесико делает каждый раз один полный оборот и еще пятую долю.

Попробуем сосчитать, сколько оборотов делает оно в течение целого года; ведь в руках аккуратного человека часы никогда не останавливаются: он не забывает их вовремя заводить. Каждую минуту колесико делает  $5 \times 60 = 300$  качаний, а каждый час —  $300 \times 60 = 18\,000$ . В сутки это составляет  $18\,000 \times 24 = 432\,000$  качаний. Считая в году для круглого числа 360 дней, имеем, что ежегодно балансир делает

$$432\,000 \times 360 = 155\,520\,000 \text{ качаний.}$$

Но было уже сказано, что балансир поворачивается при одном качании на  $1 \frac{1}{5}$  полного оборота. Значит, в течение года он успевает обернуться вокруг своей оси

$$155\,520\,000 \times 1 \frac{1}{5} = 186\,624\,000 \text{ раз,}$$

или круглым счетом 187 миллионов раз!

Уже одно это огромное число достаточно удивительно. Вы поразитесь еще более, если проделаете другой расчет: вычислите, какой путь прошел бы автомобиль, если бы колеса его совершили 187 миллионов оборотов. Поперечник автомобильного колеса 80 см; значит, окружность его — около 250 см, или  $2 \frac{1}{2}$  м. Умножив  $2 \frac{1}{2}$  на 187 миллионов, получим длину пути, которую мы желаем знать: около 470 000 километров.

Следовательно, автомобиль, будь его колеса так же неутомимы, как балансир карманных часов, более чем 10 раз обходил бы ежегодно земной шар или, если хотите, пробегал бы путь больший, чем от нас до Луны!

Нетрудно представить себе, сколько раз понадобилось бы во время такого путешествия чинить всю машину и менять колеса автомобиля. А между тем маленькое колесико карманных часов неутомимо качается по целым годам без починки, без новой смазки, без смены и работает притом с изумительной точностью...

## 84. ПУТЕШЕСТВУЮЩИЕ, СТОЯ НА МЕСТЕ

Последние строки книги мне хочется посвятить ее первым читателям, без деятельного сотрудничества которых она не могла бы появиться в свет. Я говорю, конечно, о наборщиках. Они также совершают далекие арифметические путешествия, не выходя из пределов наборного цеха, даже стоя неподвижно у наборных касс. Проворная рука труженика «свинцовой армии», скользя ежесекундно от кассы к верстатке<sup>1</sup>, проходит за год огромное расстояние.

Сделайте подсчет. Вот данные: наборщик набирает в течение рабочего дня норму в 12 000 букв и для каждой буквы должен переместить руку туда и назад на расстояние в среднем около полуметра. В году, считайте, – 300 рабочих дней.

Получаем

$$2 \times 0,5 \times 12\,000 \times 300 = 3\,600\,000 \text{ м, т. е. } 3\,600 \text{ км.}$$

Значит, за 11 лет работы даже и наборщик, не отрывающийся от кассы, совершает кругосветное путешествие. «Неподвижный кругосветный путешественник»! Это звучит куда оригинальнее, чем «кругосветный путешественник пешком».

Не найдется человека, который так или иначе не совершил бы в этом смысле кругосветного путешествия. Можно сказать, что замечательным человеком является не тот, кто проделал кругосветное путешествие, а тот, кто его не совершил. И если кто-нибудь станет уверять вас, что он этого не сделал, вы, надеюсь, сможете «математически» доказать ему, что он не составляет исключения из общего правила.

---

<sup>1</sup> В настоящее время способы набора – совсем другие. – *Примеч. ред.*

## Оглавление

К читателю серии «Занимательная наука» .....	3
<b>ЗАНИМАТЕЛЬНАЯ АРИФМЕТИКА</b> .....	5
Предисловие автора .....	7
<b>Глава первая. СТАРОЕ И НОВОЕ О ЦИФРАХ И НУМЕРАЦИИ</b> .....	9
1. Таинственные знаки .....	11
2. Старинная народная нумерация .....	13
3. Секретные торговые «меты» .....	17
4. Шашки вместо цифр .....	18
5. Арифметика за завтраком .....	21
6. Арифметические ребусы .....	25
7. Найти трехзначное число .....	30
8. Десятичная система в книжных шкафах .....	31
9. Арифметические знаки и названия у разных народов ..	35
10. Круглые числа .....	37
<b>Глава вторая. ПОТОМОК ДРЕВНЕГО АБАКА</b> .....	39
11. Чеховская головоломка .....	41
12. Счёты .....	47
13. Умножение на счётах .....	51
14. Деление на счётах .....	52
15. Отголоски старины .....	53
<b>Глава третья. НЕМНОГО ИСТОРИИ</b> .....	55
16. «Трудное дело – деление» .....	57
17. Хорошо ли мы умножаем? .....	67
18. «Русский» способ умножения .....	68
19. Из Страны пирамид .....	70
<b>Глава четвертая. НЕДЕСЯТИЧНЫЕ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ</b> .....	75
20. Загадочная автобиография .....	77
21. Простейшая система счисления .....	82
22. Необычайная арифметика .....	84
23. Чет или нечет? .....	89
24. Поучительные задачи .....	91
25. Дроби без знаменателя .....	92
<b>Глава пятая. ГАЛЕРЕЯ ЧИСЛОВЫХ ДИКОВИНОК</b> .....	95
26. Арифметическая кунсткамера .....	97
27. Число 12 .....	99
28. Число 365 .....	105
29. Три девятки .....	106
30. Число Шехерезады .....	108

31. Число 10 101. ....	110
32. Число 10 001. ....	113
33. Шесть единиц. ....	113
34. Числовые пирамиды ....	115
35. Девять одинаковых цифр. ....	119
36. Цифровая лестница ....	120
37. Магические кольца ....	122
38. Феноменальное семейство ....	129
<b>Глава шестая. ФОКУСЫ БЕЗ ОБМАНА.</b> ....	133
39. Искусство индусского счетчика. ....	135
40. Не открывая кошельков ....	137
41. Угадать число спичек ....	140
42. «Чтение мыслей» по спичкам . ....	142
43. Идеальный разновес ....	145
44. Предсказать сумму ненаписанных чисел. ....	150
45. Мнимая неожиданность. ....	154
46. Мгновенное деление. ....	156
47. Любимая цифра ....	157
48. Угадать дату рождения ....	158
49. Одно из «утешных действий» Магницкого ....	160
50. Отгадывание чисел. ....	162
<b>Глава седьмая. БЫСТРЫЙ СЧЕТ</b> ....	165
51. Действительные и мнимые феномены ....	167
52. Запоминание чисел ....	168
53. «Сколько мне дней?» ....	173
54. «Сколько мне секунд?» ....	175
55. Приемы ускоренного умножения ....	176
56. Для обиходных расчетов ....	178
<b>Глава восьмая. ПРИБЛИЖЕННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ</b> . . .	183
57. Математические загадки пирамиды Хеопса ....	185
58. Приближенные числа. ....	191
59. Округление чисел. ....	196
60. Цифры значащие и незначащие. ....	197
61. Сложение и вычитание приближенных чисел. ....	198
62. Умножение, деление и возведение в степень приближенных чисел ....	199
63. Применение на практике ....	199
64. Сбережение счетного труда ....	201
<b>Глава девятая. ЧИСЛОВЫЕ ВЕЛИКАНЫ.</b> ....	203
65. Как велик миллион? ....	205
66. Миллион на шестеренках. ....	209
67. Миллион секунд. ....	210



68. В миллион раз толще волоса .....	212
69. Упражнения с миллионом .....	213
70. Названия числовых великанов .....	215
71. Миллиард .....	218
72. Триллион .....	219
73. Числа-сверхгиганты .....	222
74. Пожиратели числовых исполинов .....	224
75. Исполины времени .....	228
<b>Глава десятая. ЧИСЛОВЫЕ ЛИЛИПУТЫ .....</b>	<b>229</b>
76. От великанов к карликам. ....	231
77. Лилипуты времени .....	232
78. Лилипуты пространства .....	235
79. Сверхисполины и сверхлилипут .....	238
<b>Глава одиннадцатая. АРИФМЕТИЧЕСКИЕ</b>	
<b>ПУТЕШЕСТВИЯ .....</b>	<b>243</b>
80. Ваше кругосветное путешествие .....	245
81. Ваше восхождение на Монблан .....	248
82. Незаметное путешествие на дно океана .....	250
83. Неутомимое колесико .....	251
84. Путешествующие, стоя на месте .....	253

*Научно-популярное издание*

**Яков Исидорович Перельман**

## **ЗАНИМАТЕЛЬНАЯ АРИФМЕТИКА ЗАГАДКИ И ДИКОВИНКИ В МИРЕ ЧИСЕЛ**

Редакторы *Е.О. Токарева, Е.А. Варшавская*

Художественный редактор *В.К. Кузнецов*

Корректор *И.Н. Мокина*

Технический редактор *Г.А. Этманова*

Компьютерная верстка *Л.А. Быковой*

ООО «Издательство АСТ»

667000, Республика Тыва, г. Казыл, ул. Кочетова, 28

ООО «Издательство Астрель»

143900, Московская обл., ул. Балашиха, пр-т Ленина, 81

ООО «Транзиткнига»

143900, Московская обл., г. Балашиха,  
ш. Энтузиастов, д. 7/1

WWW.AST.RU

E-mail: astpub@aha.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов  
на Книжной фабрике № 1 МПТР России

144003, г. Электросталь, Московской обл., ул. Тевосяна, 25

**«Занимательная арифметика»** — эта книга написана

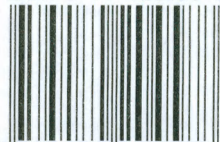
известным мастером  
занимательного жанра  
Я. И. Перельманом.

Рассказы об одном  
из древнейших разделов  
математики — арифметике,  
о числах-великанах и числах-  
карликах, о различных системах  
счисления, об арифметических  
парадоксах и головоломках  
и о многом другом, о чем  
умалчивают школьные  
учебники.

Увлекательная игра с числами,  
из которой ты узнаешь много  
интересного и приобщишься  
к высокому искусству  
логического мышления.



ISBN 5-17-020458-2



9 785170 204588